This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

UC-NRLF
$B 24 434

Vorlesungen

über

theoretische Spektroskopie

von

Dr. A. Garbasso

YC 11141

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Class

VORLESUNGEN

ÜBER

THEORETISCHE SPEKTROSKOPIE

VON

A. GARBASSO
PROFESSOR DER PHYSIK AN DER K. UNIVERSITÄT GENUA

MIT 65 FIGUREN
UND EINER TAFEL IM TEXT

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CAL

LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH
1906

Q 2451
G 3

GENERAL

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN

PROFESSOR ANDREA NACCARI

IN TURIN

IN TIEFSTER EHRFURCHT UND DANKBARKEIT

GEWIDMET VOM VERFASSER

Vorwort.

Vorliegendes Werk ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die ich im letzten Wintersemester an der Universität Genua gehalten habe; es ist kein Handbuch und soll auch nicht die Ansprüche eines solchen erheben.

Einige wertvolle und beachtungswürdige Arbeiten blieben bei den Vorlesungen aus Mangel an Zeit, und bei der Redaktion des Werkes aus Mangel an Raum unberücksichtigt; mehrere andere Untersuchungen wurden jedoch aus bestimmten Gründen unerwähnt gelassen.

Besonders habe ich mich auf physikalisch gut definierte Vorstellungen beschränken wollen bezw. habe ich alles weggelassen, was nicht als die Beschreibung eines ausführbaren Modells gelten kann. Eine theoretische Darstellung, welche sich um die Eigenschaften, oder sogar um die Möglichkeit ihres Modells nicht kümmert, ist ja für uns Physiker keine Theorie, sondern eher ein Unding.

Das ganze Buch ist in zwanzig Vorlesungen eingeteilt, und zerfällt, dem Inhalt nach, in vier Abschnitte.

In einem einleitenden Abschnitte (I. bis IV. Vorl.) sind die Haupterscheinungen der Spektroskopie, insofern sie bis jetzt der Theorie zugänglich waren, knapp geschildert; dann folgt die Beschreibung einiger elektrischer und elektrooptischer Phänomene, welche als Bilder für gewisse Ergebnisse der Spektralanalyse zu betrachten sind; am Schlusse werden noch einige mathematische Hilfssätze angeführt.

Im zweiten Teile (V. bis VII. Vorl.) finden ebenfalls, aus historischen Rücksichten, Cauchys Theorie der Lichtzerstreuung und v. Helmholtz' Theorie der anomalen Dispersion eine

knappe Behandlung. Als Anhang hierzu habe ich außerdem einige Untersuchungen von Dr. A. Filippini (in Genua) angegeben, aus denen die Möglichkeit sich ergibt, mechanische Bilder für die Moleküle zusammengesetzter Körper herzustellen.

Im dritten und vierten Abschnitte (VIII. bis XX. Vorl.) werden dann die elektrischen Theorien der Spektralanalyse behandelt, die auch den eigentlichen Kern des ganzen Werkes bilden.

Die Moleküle sind hier als Systeme elektrischer Leiter, resp. als Systeme elektrisierter in Bewegung begriffener Teilchen betrachtet. Dem physikalischen Charakter der Kräfte entsprechend, welche, in jedem Falle, die überwiegende Wirkung ausüben, möchte ich die erste Theorie als eine elektromagnetische, die zweite als eine elektrostatische bezeichnen.

Bei der Redaktion des vorliegenden Werkes haben einige Schüler von mir mitgewirkt. Dr. P. Zonta (in Genua) hat einzelne Teile redigiert, bezw. gewisse Rechnungen weiter ausgeführt, als es bei den Vorlesungen geschehen war; Dr. L. Puccianti (in Florenz) hat mir in gütigster Weise photographische Aufnahmen der Brechungskurven zur Verfügung gestellt, während stud. phil. D. Pronsato (aus Bahia Blanca) die Herstellung der Figuren besorgte. Allen diesen Herren, sowie in ganz besonderer Weise Herrn Dr. M. Seddig (in Marburg), der das Manuskript durchzulesen die Güte hatte, und Herrn Dr. L. Giuganino (in Genua), der mir bei der Korrektur mit großem Fleiße beigestanden, spreche ich hier meinen besten Dank aus.

Der geehrten Verlagsfirma bin ich ebenfalls, für die sorgfältige Ausstattung des Buches sehr zu Dank verpflichtet.

Genua, Physikal. Institut der K. Universität, Ostern 1905.

A. Garbasso.

Inhalt.

Erster Abschnitt. Einleitung.

		Seite
I. Vorlesung.	Die Haupterscheinungen der Spektroskopie .	1
II. Vorlesung.	Elektromagnetische Bilder	16
III. Vorlesung.	Die optische Resonanz	26
IV. Vorlesung.	Mathematische Hilfssätze	36

Zweiter Abschnitt. Mechanische Theorien.

V. Vorlesung.	Cauchys Theorie der Dispersion des Lichtes	46
VI. Vorlesung.	v. Helmholtz' Theorie der anomalen Lichtzerstreuung	53
VII. Vorlesung.	Mechanische Bilder für die Moleküle zusammengesetzter Körper	68

Dritter Abschnitt. Elektromagnetische Theorie.

VIII. Vorlesung.	Leiter mit einem einzigen Freiheitsgrad: elektromagnetische Emissionstheorie	84
IX. Vorlesung.	Zahlenmäßige Berechnung molekularer Gebilde	102
X. Vorlesung.	Leiter mit einem einzigen Freiheitsgrad: elektromagnetische Dispersionstheorie	109
XI. Vorlesung.	Elektrische Schwingungen in komplizierten Leitern: Verallgemeinerung der elektromagnetischen Emissionstheorie	119
XII. Vorlesung.	Weitere Entwicklung der elektromagnetischen Dispersionstheorie	137
XIII. Vorlesung.	Elektrische Schwingungen in einem Leitersysteme	146
XIV. Vorlesung.	Entwurf einer elektromagnetischen Theorie der Spektralanalyse	164
XV. Vorlesung.	Schillerfarben und optische Resonanz . . .	185

Vierter Abschnitt. Elektrostatische Theorie.

Seite

XVI. Vorlesung. Gleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper: Möglichkeit einer elektrostatischen Theorie der Spektralanalyse 194

XVII. Vorlesung. Stoneys Erklärung der Doublet- und Serienspektren 210

XVIII. Vorlesung. J. J. Thomsons Modell der materiellen Atome 225

XIX. Vorlesung. Stabilitätsfragen: das periodische System der Elemente 240

XX. Vorlesung. Entwurf einer elektrostatischen Theorie der Spektralanalyse 249

Erster Abschnitt.

Einleitung.

Erste Vorlesung.

Die Haupterscheinungen der Spektroskopie.

§ 1—2. Normale und anomale Dispersion. — § 3. Linienserien von Kayser und Runge. — § 4. Strahlungsverteilung im elektrischen Lichtbogen. — § 5. Lockyers lange und kurze Linien. — § 6. Einfluß des magnetischen Feldes auf Gasspektren. — § 7. Spektren der Sonnenprotuberanzen. — § 8. Spektren zusammengesetzter Körper. — § 9. Schillerfarben. — § 10. Spektren isomerer Verbindungen. — §. 11. Das Zeemansche Phänomen. —

§ 1. Tritt ein weißer Lichtstrahl durch ein farbloses, durchsichtiges Prisma hindurch, so wird er bekanntlich abgelenkt und zerstreut; dabei nimmt die Ablenkung mit abnehmender Wellenlänge zu. Wir sagen es handle sich in diesem Falle um eine normale Dispersion.

Die normale Dispersion für nicht allzuweit ausgedehnte Spektralgebiete wird nun mit genügender Annäherung durch die Cauchysche Formel dargestellt, welche lautet:

$$N = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Hierin bedeutet N den Brechungskoeffizienten, λ die Wellenlänge; A und B endlich sind experimentell zu bestimmende Konstanten. Als Beispiel für die Genauigkeit, welche durch eine solche Darstellung zu erreichen ist, führen wir einige Zahlenangaben an, die für Flintglas erhalten wurden.

Strahlen	Wellenlängen[1])	N beobachtet	N berechnet
B	6 871	1,612 68	1,612 68
C	6 565	1,614 43	1,614 52
D	5 893[2])	1,619 29	1,619 65
E	5 270	1,625 69	1,626 23
F	4 861	1,631 48	1,632 00
G	4 304	1,642 69	1,642 69
H	3 955	1,652 68	1,651 76

Sehr ausgedehnte Reihen von Messungen kann man übrigens durch die kompliziertere Kettelersche Formel

$$N = -AA^2 + B + \frac{C}{A^2} + \frac{D}{A^4}$$

darstellen. Steinsalz liefert z. B., nach Bestimmungen von Langley und Paschen, folgende Tabelle:

Wellenlängen	N beobachtet	N berechnet	Beobachter
3 969	1,568 33	1,568 34	Langley
4 861	1,553 23	1,553 37	„
5 184	1,549 75	1,549 88	„
5 890	1,544 18	1,544 26	„
6 563	1,540 51	1,540 54	„
7 594	1,536 70	1,536 70	„
11 780	1,530 1	1,530 0	„
17 670	1,527 2	1,527 1	„
23 560	1,525 4	1,525 4	„
29 451	1,524 3	1,524 2	„
35 341	1,522 7	1,522 7	„
41 231	1,521 5	1,521 45	„
47 121	1,520 1	1,519 6	„
53 000	1,518 6	1,518 2	„
60 610	1,514 7	1,515 5	Paschen
64 560	1,513 9	1,513 9	„
81 880	1,506 1	1,506 6	„
86 600	1,503 2	1,504 3	„
90 980	1,501 2	1,501 2	„
94 550	1,499 3	1,499 1	„
97 600	1,497 4	1,497 4	„

[1]) Die Wellenlängen sind mit 10^8 multipliziert.

[2]) Mittelwert aus den Wellenlängen der zwei Natriumlinien.

§ 2. Es wurde ausdrücklich betont, daß die normale Lichtzerstreuung nur dann eintritt, wenn das zur Erzeugung des Spektrums verwendete Prisma farblos und durchsichtig ist. Ist dies nicht der Fall, so wird die Reihenfolge der Farben im Spektrum, unter Umständen eine ganz andere; dann spricht man von einer anomalen Dispersion. Zur Orientierung können folgende Zahlenwerte dienen, welche für alkoholische Cyanin- resp. Fuchsinlösungen von Kundt mitgeteilt wurden.

Strahlen	N	
	Cyanin	Fuchsin
B	1,378 1	1,387 3
C	1,383 1	1,391 8
E	1,365 8	1,398 2
F	1,370 5	1,361 3
G	1,377 9	1,366 8
H	1,382 1	1,375 9

Durch sorgfältige Beobachtungen hat sich feststellen lassen, daß die anomale Dispersion mit der selektiven Lichtabsorption innig zusammenhängt. Es zeigt nämlich die Brechungskurve

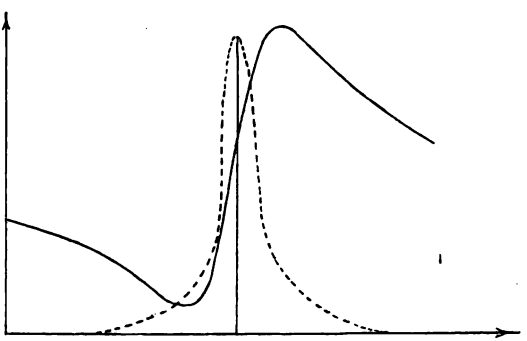


Fig. 1.

in der Umgebung eines Absorptionsstreifens eine charakteristische Schwankung. Fig. 1 erläutert nach Drude[1]) diese Verhältnisse für einen Stoff, der ein einziges Maximum der

[1]) Es gibt die punktierte Linie den Gang der Absorption, die ausgezogene aber den Gang der Brechung an.

Absorption besitzt; Fig. 2 gibt dagegen (nach Paschen) den Gang der Brechung an, für einen Körper, dem zwei Absorptionsstreifen zukommen. Neuerdings hat Dr. L. Puccianti (in

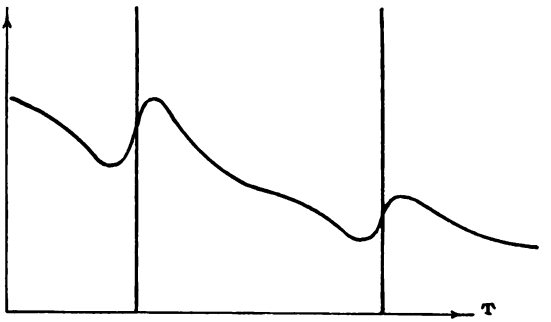


Fig. 2.

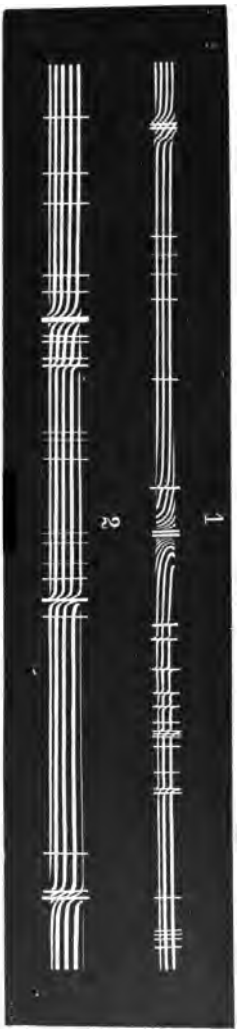


Fig. 3.

Florenz), durch eine sinnreiche interferentielle Methode, auf die hier leider nicht eingegangen werden kann, sehr schöne photographische Aufnahmen der Brechungskurven erhalten.

Als Beispiel (Fig. 3) sind zwei Aufnahmen wiedergegeben, welche den Brechungsgang für Strontium- bezw. Barium-Dampf darstellen; zu bemerken ist hierbei, daß in den Fig. 1, 2 und 3 die Wellenlängen von links nach rechts zunehmen.

§ 3. In den Spektren der verdünnten Gase, welche bekanntlich diskontinuierliche Linien enthalten, sind viele Regelmäßigkeiten aufgedeckt worden. Wir begnügen uns anzuführen, daß sehr oft Serien auftreten, deren Linien nach der empirischen Formel von Kayser und Runge:

$$A_n^{-1} = A - \frac{B}{n^2} - \frac{C}{n^4}$$

untereinander verbunden sind; n hat darin die Reihe der ganzen Zahlen zu durchlaufen, wobei die Werte $n = 1$ und $n = 2$ ausgeschlossen bleiben.

Als Beispiel sei jetzt nach Kayser (Handbuch der Spektroskopie, II, 520) das Spektrum des Natriumdampfes eingehend beschrieben.

λ	$\frac{1}{\lambda}$	Hauptserie		1. Nebenserie		2. Nebenserie	
		n	berechnet	n	berechnet	n	berechnet
8 194,76	12 202,92	—	—	3	8 194,76	—	—
8 184,33	12 218,47	—	—	3	8 184,33	—	—
6 161,15	16 230,74	—	—	—	—	4	6 161,15
6 154,62	16 247,96	—	—	—	—	4	6 154,62
5 896,16	16 960,19	3	5 818,7	—	—	—	—
5 890,19	16 977,38	3	5 804,6	—	—	—	—
5 688,26	17 580,07	—	—	4	5 688,26	—	—
5 682,90	17 596,65	—	—	4	5 682,90	—	—
5 675,92	17 618,29	—	—	—	—	—	—
5 670,40	17 635,44	—	—	—	—	—	—
5 153,72	19 403,46	—	—	—	—	5	5 153,72
5 149,19	19 420,53	—	—	—	—	5	5 149,19
4 983,53	20 066,10	—	—	5	4 983,53	—	—
4 979,30	20 083,14	—	—	5	4 979,30	—	—
4 752,19	21 042,93	—	—	—	—	6	4 752,19
4 748,36	21 059,90	—	—	—	—	6	4 748,36
4 669,4	21 416,03	—	—	6	4 668,45	—	—
4 665,2	21 435,31	—	—	6	4 664,68	—	—
4 546,03	21 997,21	—	—	—	—	7	4 544,86
4 542,75	22 013,10	—	—	—	—	7	4 541,36
4 500,0	22 222,22	—	—	7	4 497,32	—	—
4 494,3	22 250,41	—	—	7	4 493,80	—	—
4 423,7	22 605,51	—	—	—	—	8	4 421,95
4 420,2	22 623,41	—	—	—	—	8	4 418,65
4 393,7	22 759,86	—	—	8	4 392,83	—	—
4 390,7	22 775,41	—	—	8	4 389,40	—	—
4 343,7	23 021,85	—	—	—	—	9	4 342,44
4 325,7	23 117,65	—	—	9	4 323,94	—	—
3 303,07	30 274,87	4	3 303,07	—	—	—	—
3 302,47	30 280,37	4	3 302,47	—	—	—	—
2 852,91	35 051,93	5	2 852,91	—	—	—	—
2 680,46	37 307,03	6	2 680,46	—	—	—	—

Die Tabelle zeigt, daß die Natriumlinien in sechs Serien zerfallen, von denen jedoch je zwei so nahe zusammenfallende Linien haben, daß man sagen kann, es seien drei Serien von Paaren (Doublets) vorhanden. Die stärksten umgekehrten Linien bilden die Hauptserie. Die *D*-Linien bilden das erste Paar, dann folgen die schon sehr nahe zusammenliegenden Linien 3303 und 3302; die folgenden Paare sind nicht mehr getrennt worden. Berechnet man die Formeln aus 3303, 2852, 2680 resp. aus 3302, 2852, 2680 indem man ihnen die Ordnungszahlen 4, 5 und 6 gibt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$10^8 \Delta_n^{-1} = 41\ 542{,}51 - 130233\, n^{-2} - 800791\, n^{-4},$$
$$10^8 \Delta_n^{-1} = 41\ 550{,}33 - 130710\, n^{-2} - 793751\, n^{-4}.$$

Berechnet man daraus die Werte für $n = 3$, so erhält man statt der *D*-Linien die in der Tabelle angegebenen Werte, die etwa um 80 Einheiten zu klein sind.

Von dieser Hauptserie sind nur zwei Glieder, wie bereits erwähnt, als Paare beoabachtet; ihre Schwingungsdifferenzen sind: für $n = 3$ 17,2, für $n = 2$ 5,5. In allen Paaren der Hauptserie ist die zweite Linie etwas stärker als die erste.

Unter den übrigen Linien des *Na* finden wir weiter zwei Serien, deren Linien stärker sind als die anderen, und welche nur nach dem Rot hin verbreitert sind. Wir nennen diese Serien von Paaren erste Nebenserie.

Für diese Paare ist von Julius gefunden worden, daß ihre Schwingungsdifferenz konstant ist. In der Tat ergeben die Zahlen der obigen Tabelle 16,0, 17,0, 19,3, 28,2, 15,6, während die Differenz für die *D*-Linien 17,2 ist, also mit der ersten Nebenserie identisch.

Außerdem sind noch zwei Serien mit schärferen und schwächeren Linien vorhanden; wir nennen diese Serie von Paaren die zweite Nebenserie. Für deren Schwingungsdifferenzen ist 17,2, 17,1, 17,0, 15,9, 17,9 gefunden worden und man sieht sofort, daß diese Werte identisch sind mit jenen der ersten Nebenserie und der *D*-Linien.

Bei beiden Nebenserien ist, entgegen dem Verhalten bei der Hauptserie, die erste Linie die stärkere.

Diese drei Serien von Paaren enthalten alle Linien des *Na* bis auf ein Paar bei 5676 und 5670, dessen Linien un-

scharf nach dem Violett hin sind; auch dieses Paar hat die Schwingungsdifferenz 17,2. Seine Bedeutung ist bis jetzt jedoch unklar geblieben.

Im Spektrum des Kupfers, wovon weiter unten wieder die Rede sein wird, finden sich acht Paare, von denen zwei die Eigentümlichkeit zeigen, daß die erste Linie doppelt ist und daß die schwächere Komponente von größerer Wellenlänge die richtige Schwingungsdifferenz mit der einfachen zweiten Linie des Paares ergibt. Wir rechnen diese relativ starken verbreiteten Paare zu einer Serie. Dafür ergibt sich folgende Tabelle:

λ	$\frac{1}{\lambda}$	Schwingungsdifferenz	n
5 220,25	19 156,2		
5 218,45	19 162,8	248,7	4
5 153,33	19 404,9		
4 063,50	24 609,3		
4 062,94	24 612,7	248,8	5
4 022,83	24 858,1		
3 688,6	27 110,6	252,8	6
3 654,6	27 362,8		

Daß bei dem dritten Paare die erste Linie nicht doppelt beobachtet ist, darf man gegen die Zugehörigkeit nicht einwenden, da der Abstand der Komponenten offenbar sehr schnell abnimmt. Für die Paare ist, wie in der Tabelle angegeben, $n = 4$, 5 und 6 anzunehmen.

In den Spektren, welche bis jetzt betrachtet wurden, fanden wir die Linien zu lauter Doublets angeordnet; andere Spektren zeigen aber ganze Serien von Triplets, wie z. B. die Mg-, Ca-, Sr-, Zn-, Cd-, Hg-Spektren. Zahlenangaben hierfür mögen, der Kürze halber, unterbleiben.

§ 4. Der elektrische Lichtbogen ist schon vielfach mit dem Spektroskop untersucht worden, aber erst in der Neuzeit hat man hieraus interessante Folgerungen gezogen. Hauptsächlich geschah dies von Seite des Herrn P. Lenard, der sich die Frage gestellt hatte, wie die Strahlung in den verschiedenen Bogenbezirken verteilt sei. Seine äußerst sinnreiche Versuchsordnung war dabei folgende: der Spalt des Spektro-

skops wurde entfernt und auf seine Ebene ein reelles Bild des Bogens projiziert; unter diesen Umständen wird im Spektrum jede Linie durch ein Bogenbild ersetzt.

Bei den Versuchen von Lenard kamen Kohlenelektroden zur Anwendung, von denen die untere (positive) Elektrode in einer kleinen Höhlung etwas Natriumchlorid enthielt.

Der Bogen erschien dann in Gestalt von zwei aus den Elektroden hervorkommenden Flammen, welche nicht ineinander übergingen, sondern sich nur berührten.

Dabei ließ sich feststellen, daß die Flammen, welche der Hauptserie entsprechen, die längeren sind; dann folgten die der ersten Nebenserie, und endlich jene der zweiten Nebenserie.

Ganz ähnliche Resultate hat der Verfasser bei Beobachtung des Kupferspektrums erhalten. Bei diesen Versuchen wurden als Elektroden dicke Kupferdrähte benutzt, wobei aber der Bogen ein ganz anderes Aussehen wie vorhin erhielt. Die leuchtende Brücke ging von der einen zu der anderen Elektrode hinüber und war von einem leuchtenden Schwanz begleitet.

Betrachtet man nun das Phänomen durch das spaltlose Spektroskop, so überzeugt man sich bald, daß gewisse Linien, und zwar jene Linien, welche der Doublets-Serie angehören, keinen Schwanz besitzen.

Das Verhalten der drei hellen, grünen Kupferlinien ist da-

Fig. 4.

bei ganz charakteristisch; die zwei ersten ($\Lambda = 5218$ und $\Lambda = 5153$), welche das zweite Paar ($n = 4$) der Serie bilden,

erscheinen nämlich als schwanzlos, die dritte dagegen ($\lambda = 5106$) ist mit einer langen Schleppe geziert (Fig. 4).

Dabei ist zu bemerken und gibt für die Theorie, wie wir nachher sehen werden, ein recht interessantes Resultat, daß jeder Linie in den verschiedenen Bogengegenden eine gut bestimmte Lage zukommt. Fig. 5 gibt davon einen Beweis; denn

Fig. 5.

hier sind die Spektren aufgenommen, welche dem äußeren resp. dem mittleren Kupferbogenbezirk entsprechen. Wie man sieht, fallen gelegentlich einige Linien aus, während die übrigbleibenden aber ihre frühere Lage beibehalten.

§ 5. Die eben besprochenen Untersuchungen von Lenard und Garbasso, haben mit älteren Versuchen von Lockyer eine innige Verwandtschaft. Lockyer studierte seiner Zeit die Emissionsverhältnisse bei elektrischen Funken und fand, wenn auf den Spalt des Spektroskops ein reelles Bild des Funkens entworfen wird, daß alsdann gewisse Linien durch die ganze Strecke hindurchgehen, während andere auf die Nähe der Elektroden beschränkt bleiben.

Deswegen sprach er von langen und kurzen Spektrallinien.

Hierbei ist wieder zu bemerken, daß die Linien ausnahmslos geradlinig erscheinen, was eben beweist, daß sie in den verschiedenen Funkengegenden dieselbe Lage einnehmen.

Für diese Vorgänge gibt Fig. 6 eine Darstellung; es

Fig. 6.

handelt sich hierbei um einen Funken, der zwischen Zink- resp. Kadmium-Elektroden übersprang.

§ 6. Stärkeveränderungen von Spektrallinien sind auch unter ganz anderen Verhältnissen zu beobachten. Wird z. B.

eine Leidener Flasche in den Entladungskreis einer Geißlerschen Röhre parallel eingeschaltet, so treten gewöhnlich im Spektrum zahlreiche neue Linien hervor. Dasselbe gilt nun für die Einwirkung eines magnetischen Feldes.

Es ist neuerdings von Dr. P. Zonta (in Genua) nachgewiesen worden, daß dabei ganz ähnliche Phänomene zum Vorschein kommen. Wie in den zuerst angegebenen Fällen, so ist auch hier die Lage der einzelnen Linien eine fest bestimmte. Die Linien, die früher außer Wirkung der Kapazität und des Feldes, im Spektrum vorkamen, verbleiben stets an ihren Stellen.

Die Versuchsanordnung von Zonta ist aus Fig. 7 leicht

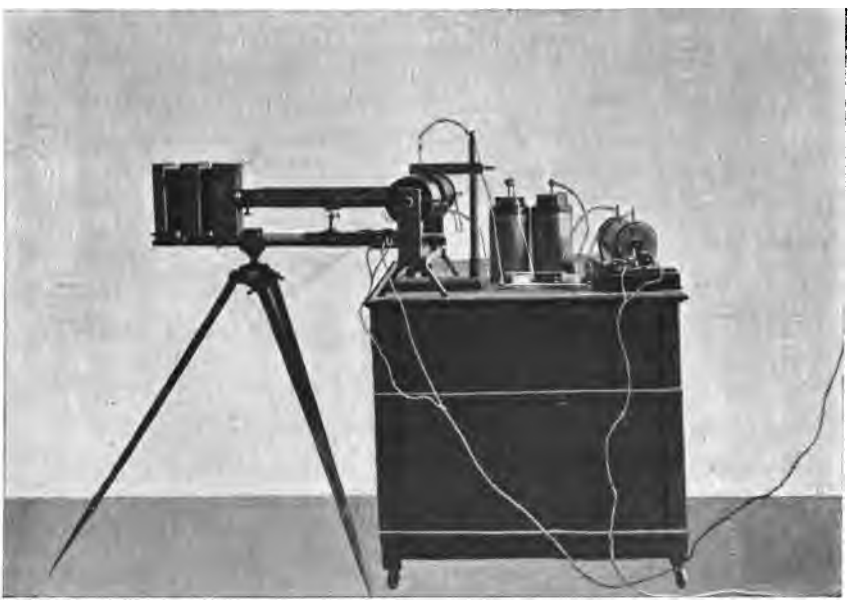


Fig. 7.

zu entnehmen; seine Resultate sind durch die Fig. 8, 9, 10 und 11 erläutert. Diese Figuren stellen der Reihe nach die Spektren von Chlor, Brom, Siliziumchlorid und Stickstoff dar; dabei ist in jeder Figur mit 1 das gewöhnliche Spektrum

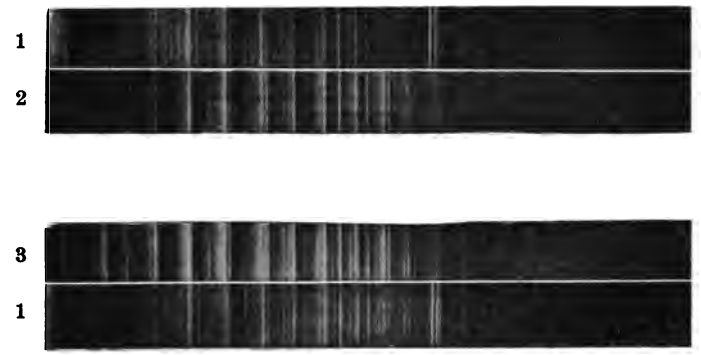


Fig. 8.

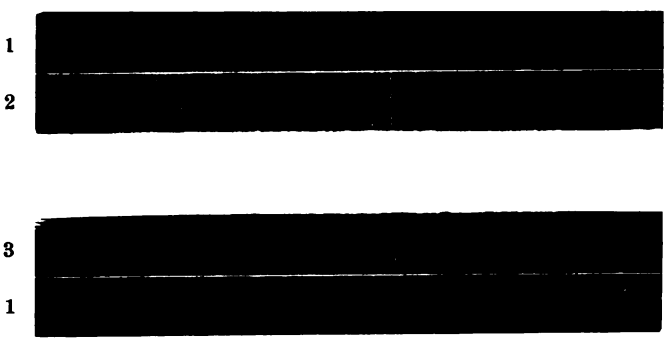


Fig. 9.

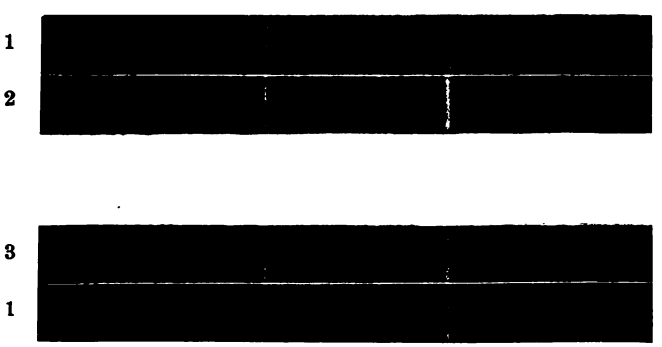


Fig. 10.

bezeichnet, mit 2 bezw. 3 die Spektren, welche unter Wirkung der Kapazität bezw. der magnetischen Kräfte entstehen.

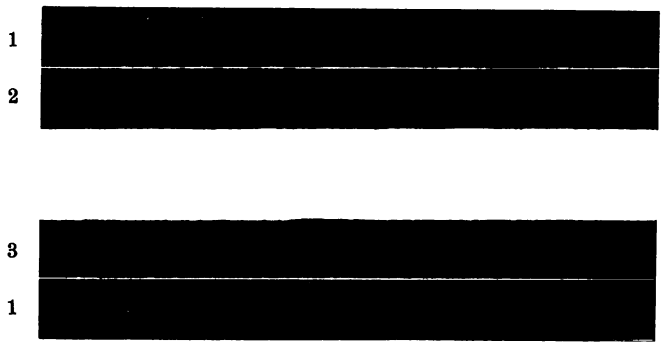


Fig. 11.

§ 7. Zu ganz verschiedenen und in höchstem Grade beachtungswürdigen Ergebnissen kam nun Lockyer, indem er die Sonnenprotuberanzen spektroskopischen Beobachtungen unterzog. Von dicht nebeneinander liegenden Linien sind die einen in Ruhe, andere nach dem Rot hin und wieder andere nach dem Violett verschoben. Die Linien vertauschen in verschiedenen Flecken und Protuberanzen ihre Rolle, aber doch kann man einige Linien herausfinden, die sich immer in derselben Weise verhalten, also offenbar zusammengehörig sind.

Ähnliche Tatsachen wurden später bei den Spektren der Neusterne beobachtet.

Es wird sich zeigen, daß vom theoretischen Standpunkte aus, diesen Resultaten eine fundamentale Bedeutung zuzuschreiben ist.

§ 8. Spektren von zusammengesetzten Körpern sind ohne Schwierigkeiten fast ausschließlich durch Absorption zu beobachten. Daß in diesen die Linien der einzigen Komponenten wieder zu erkennen seien, ist oft bestritten worden, scheint aber kaum zu leugnen, wenn man bedenkt, daß gewisse Linien in verschiedenen Verbindungen desselben Körpers immer wieder auftreten. Dabei erfahren aber solche Linien der Regel nach kleine Verschiebungen. Als Beispiel hierfür führen wir die klassischen Beobachtungen von Bunsen an, über die Absorptionsspektren der Lösungen von Didymverbindungen.

Bunsen arbeitete mit einem Apparat, der mit vier größeren Flintglasprismen versehen war, von denen das eine einen Winkel von 60° und jedes der drei anderen einen Winkel von 45° besaß, während das Fernrohr eine vierzig malige Vergrößerung hatte.

Es kamen drei Lösungen von Didymsulfat resp. Didymacetat und Didymchlorid zur Untersuchung, und es ließ sich feststellen, daß die Lagen der Helligkeitsminima von der Natur der Verbindung abhingen. Strenger gesagt, es wurden sämtliche Streifengruppen, in der Ordnung der wachsenden Molekulargewichte, immer mehr nach dem roten Ende des Spektrums hin verschoben.

Fig. 12 erläutert diese Verhältnisse für die Gruppe, welche der Sonnenlinie *F* naheliegt.

Mit den Bunsenschen gut übereinstimmende Resultate hat übrigens Lockyer durch Beobachtung der Emissions-

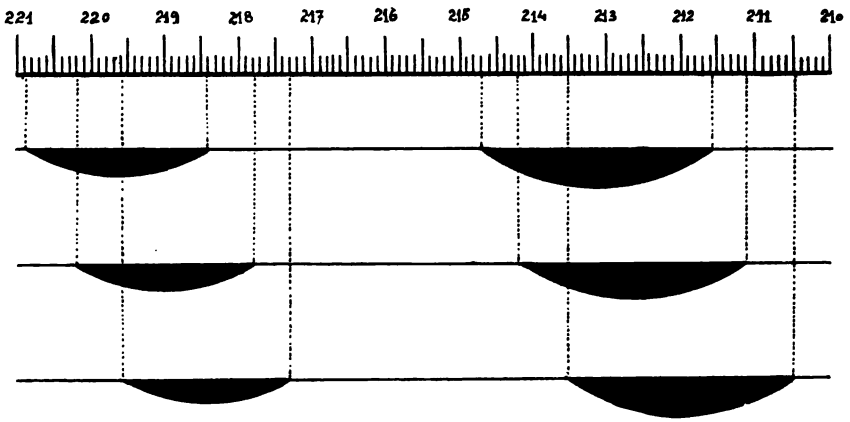


Fig. 12.

spektren von den Chloriden resp. Bromiden und Jodiden der Alkalimetalle erhalten.

§ 9. Daß Emission und Absorption im engsten Zusammenhange stehen, ist seit den bahnbrechenden Arbeiten von Kirchhoff und Bunsen wohl bekannt. Geht ein weißes Lichtbündel durch eine Natriumflamme hindurch, so zeigt bekanntlich sein Spektrum (unter gewissen Nebenumständen) zwei schwarze

Absorptionsstreifen, welche genau die Lage einnehmen, die den gelben Natriumlinien entspricht.

Man sagt daher, es absorbiere ein Körper gerade die Wellen, die er auszusenden vermag.

Mit dem Strahlungsprozeß hat nun der Reflexionsvorgang einige Verwandtschaft; diese Phänomene sind aber durchaus nicht miteinander zu verwechseln. Es gibt in der Tat zweierlei Arten gefärbter Körper; die der ersten Art zeigen im durchgehenden ebenso wie im zurückgeworfenen Lichte ein und dieselbe Farbe, die Körper der zweiten Art erscheinen dagegen bei Absorption und Reflexion komplementär gefärbt. Wir sagen, es handle sich im ersten Falle um eine gewöhnliche Farbe, im zweiten Falle um eine Oberflächen- oder Schillerfarbe.

Gute Beispiele für diese Verhältnisse sind in den Schuppen der Schmetterlinge zu finden. So zeigen die gelben Schuppen des Papilio Machaon ebenso im durchgehenden als im reflektierten Lichte ihre charakteristische Ockerfarbe, die tiefblauen Schuppen der Morpho, wie die himmelblauen Schuppen der Lycaena-Männchen sind dagegen in durchgehendem Lichte gelblich gefärbt.

Es muß ausdrücklich betont werden, daß die Theorie bis jetzt Stoffe mit gewöhnlicher Farbe gar nicht darzustellen vermag; sie zieht nur Schillerfarben in Betracht.

Möge nun ein Körper mit gewöhnlicher oder oberflächlicher Farbe versehen sein, so wirft er Licht nur in dem einzigen Falle zurück, wo er von ganz bestimmten Wellen getroffen wird und der Regel nach ist dabei die erregende Farbe dieselbe wie die zurückgeworfene.

Dies kann man leicht durch folgenden Versuch beweisen. Es werden einige bunte Papierstücke (sagen wir ein hellgelbes, ein tiefblaues und ein purpurrotes) durch eine Natriumflamme beleuchtet; dann erscheint das blaue sowohl wie das rote Papier als ganz schwarzes, während das gelbe seine frühere Farbe behält.

§ 10. Es ist oben gesagt worden, daß das Absorptionsspektrum einer Lösung von der Zusammensetzung des gelösten Stoffes abhängt; jetzt müssen wir noch hinzufügen, daß nicht bloß die Zusammensetzung, sondern auch die Struktur hierfür maßgebend ist.

Isomere Verbindungen haben nämlich sehr oft ganz verschiedene Absorptionsspektren. So zeigen z. B. Ortho- und Meta-Xylol in alkoholischer Lösung einen einzigen Absorptionsstreifen, Para-Xylol dagegen hat zwei getrennte Minima der Helligkeit.

§ 11. Zum Schluß sei hier noch das Zeemansche Phänomen in seinen Hauptzügen erwähnt; auf die sehr verwickelte Theorie dieser Erscheinung wollen wir in unseren Vorlesungen nicht eingehen, wir werden aber aus den Zeemanschen Resultaten einen Satz von großer Wichtigkeit ableiten.

Das Zeemansche Phänomen betrifft, wie bekannt, die Veränderungen, welche eine Spektrallinie erfährt, wenn die Lichtquelle sich in einem magnetischen Felde befindet.

Beschränken wir uns auf den einfachsten unter den möglichen Fällen, so zeigt sich

a) wenn das Licht sich zu der Feldrichtung senkrecht fortpflanzt, daß alsdann die Linie durch die magnetische Wirkung verbreitert wird; der mittlere Teil und die Ränder

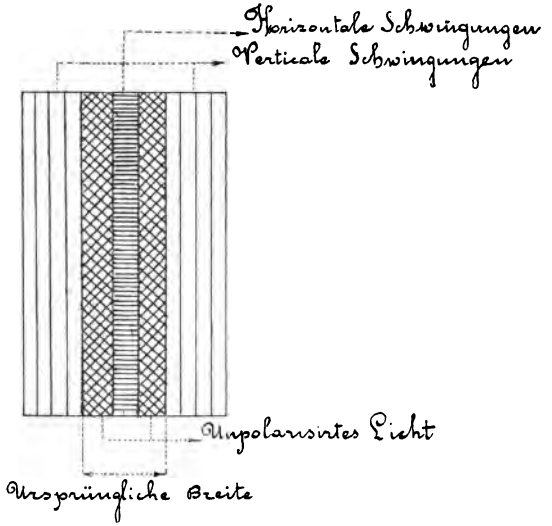


Fig. 13.

erscheinen dabei als geradlinig polarisiert, und zwar in der Weise wie aus Fig. 13 zu entnehmen ist;

b) wenn der Lichtstrahl der Kraftrichtung parallel läuft, daß sich dann die Linie zu einem Doublet spaltet, deren Elemente entgegengesetzt zirkular polarisiert sind. Die beschleunigte Schwingung hat dabei den Sinn des magnetisierenden Stromes.[1]

Zweite Vorlesung.

Elektromagnetische Bilder.

§ 1. Absorption der elektromagnetischen Wellen durch leitende Schichten. — § 2. Garbassos Darstellung der selektiven Absorption resp. Reflexion. — § 3—4. Versuche von Garbasso und Aschkinass über Brechung und Dispersion der Strahlen elektrischer Kraft.

§ 1. Nach Maxwells Theorie und H. Hertz' bahnbrechenden Untersuchungen, sind bekanntlich die Lichtstrahlen als Strahlen elektrischer Kraft mit sehr kleinen Wellenlängen zu betrachten. Es liegt daher der Gedanke nahe, die Haupterscheinungen der Spektroskopie durch elektrische Bilder zu erläutern; bei derartigen Versuchen mit gewöhnlicher Materie, zeigt sich aber bald, daß Molekularerscheinungen keineswegs zum Vorschein treten. Und dies stimmt auch mit den theoretischen Ergebnissen vollständig überein.

Maxwells Theorie, in ihrer älteren Form, sieht nämlich keine Dispersion und keine selektive Absorption voraus. Dabei sollen die Metalle, gerade deswegen, daß sie Ströme zu leiten vermögen, Wellen von jeder Länge absorbieren, und die Dielektrika dagegen auf hindurchgehende Strahlen gar keine Wirkung ausüben (man vergleiche hierüber die X. Vorl. § 3).

In der Tat hat es sich feststellen lassen, daß zwischen sehr weiten Grenzen der Wellenlängen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Störungen eine für jeden Stoff bestimmte und konstante Größe ist; so fanden z. B. Garbasso und Aschkinass für den Brechungsexponenten

[1]) Diese einleitende Vorlesung beansprucht keineswegs eine, wenn auch sehr knappe Darstellung der Spektralanalyse zu geben; diese wenigen Tatsachen habe ich bloß erwähnen wollen, da die nachher zu besprechenden Theorien hierfür Rechenschaft zu geben wissen.

von Petroleum, mit Wellen von 2 m Länge, denselben Wert wie Arons und Rubens mit Wellen von 6 m.

Ebenfalls wird durch den Versuch bestätigt, daß eine leitende Schicht elektrische Wellen schon in sehr kleiner Dicke absorbiert; diese Eigenschaft ist dabei nicht mit der chemischen Natur des betrachteten Stoffes verbunden, hängt aber von der gröberen Struktur bezw. von der Leitungsfähigkeit in hohem Grade ab.

Dies kann man am besten durch die Anordnung beweisen, die in Fig. 14 dargestellt wird.

Ein Glaszylinder wird auf chemischem Wege inwendig versilbert; stellt man jetzt einen Hertzschen Erreger gerade in der Achse des Zylinders auf, so übt er auf naheliegende Resonatoren gar keine Wirkung aus.

Wird aber die silberhaltige Lösung bei dem Abscheiden umgerührt, so scheidet sich das Silber als eine staubförmige Schicht aus; und dann absorbiert es die elektromagnetischen Störungen nicht mehr. Die Absorption hängt also keineswegs, wie bemerkt, von den chemischen Eigenschaften des Schirmes, sondern vielmehr von seiner Struktur, und zwar hauptsächlich von der entsprechenden Leitfähigkeit ab.

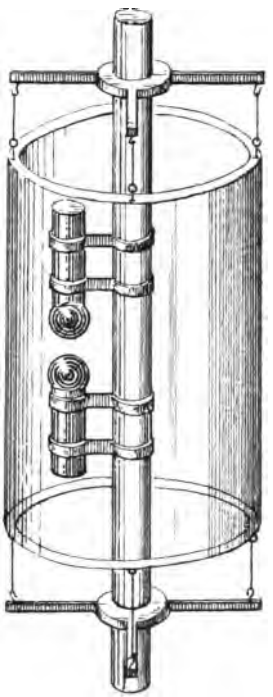


Fig. 14.

Dabei wirft eine metallische Silberschicht die Strahlen von jeder Wellenlänge regelmäßig zurück, wogegen eine staubförmige Schicht keine merkliche Reflexion ausübt.

§ 2. Eine einfache Überlegung zeigt aber bald, wie man Gebilde herzustellen hat, welche sich gegen Strahlen elektrischer Kraft in gleicher Weise wie ponderable resp. gefärbte Körper gegen Licht verhalten werden. Wie es einleuchtend ist, und wie es sich nachher theoretisch leicht feststellen lassen wird (VI., X., XII. und XV. Vorlesung), sind selektive Reflexion resp.

Absorption, sowie die Dispersion selbst, als lauter Resonanzwirkungen zu betrachten. Ein Schirm wird also einem gefärbten analog erscheinen, wenn er aus Elementen besteht, welchen gewisse Schwingungsperioden zukommen und welche nur durch bestimmte Wellen zur Resonanz erregt werden können.

In der Tat ist es dem Verfasser gelungen, in dieser Weise die Erscheinungen der selektiven Absorption des Lichtes, so-

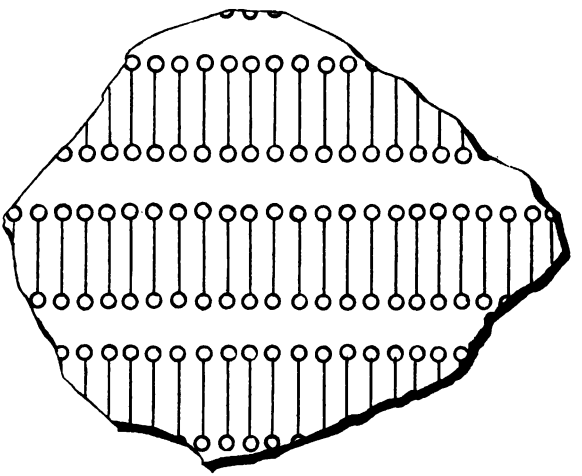


Fig. 15.

wie der Entstehung der Oberflächenfarben vollständig zu reproduzieren.

Auf einem Holzbrett (1,75 m hoch und 1,25 m breit) wurden in sechs horizontalen Reihen 186 gleiche Resonatoren aufgestellt; die Resonatoren bestanden aus geraden Kupferdrähten (von 20 cm Länge und 0,14 cm Dicke) mit je zwei Blechscheiben (von 3,8 cm Durchmesser). Dieser Schirm (Fig. 15) reflektierte nun die Strahlen elektrischer Kraft regelmäßig; dabei war die zurückgeworfene Strahlung mit verschiedenen Resonatoren nachzuweisen, die Reflexion zeigte sich aber nur dann als eine stark ausgesprochene, wenn der Untersuchungsapparat eben dieselbe Schwingungsperiode wie die Elemente des Schirmes besaß.

Das betrachtete Resonatorensystem absorbierte überdies, in ganz besonderer Weise, die Strahlen, die es selektiv zu reflektieren vermochte.[1]

Hiermit hat man also ein Bild für jene Körper gewonnen, welche, wie die Schuppen der Morpho, eine Schillerfarbe zeigen (I. Vorlesung § 9).

§ 3. Dieselbe Methode bietet nun die Möglichkeit dar, Media zusammenzustellen, in welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen von der Schwingungszahl abhängig ist. Besteht das Prisma aus Resonatoren von einer einzigen Schwingungsdauer, so können wir voraussehen, daß, in Analogie mit den optischen Erscheinungen, für Wellen von etwas größerer Periode die Ablenkung mit abnehmender Länge zunehmen wird.

Garbasso und Aschkinass haben diesen Gedanken zu verwirklichen versucht, und die Ergebnisse der Beobachtung haben ihrer Erwartung vollständig entsprochen. Es gelang ihnen nämlich, mit einem Resonatorenprisma eine Brechung der Strahlen elektrischer Kraft zu erhalten; und weiterhin fanden sie, daß die Größe der Ablenkung von den Dimensionen des Resonators abhing, mit welchem die hindurchgelassene Strahlung beobachtet wurde.

Bei diesen Versuchen bestand der primäre Leiter nach den Angaben von Righi (Fig. 16) aus vier Kugeln von 1,36 cm Durchmesser; die Hauptschwingung des Apparates entspricht einer Wellenlänge von etwa 7,5 cm.

Den Erreger brachten nun Garbasso und Aschkinass in den Brennpunkt (E, Fig. 17) eines sphärischen Messinghohlspiegels S_1, dessen Brennweite 14 cm betrug; der Durchmesser der Spiegelöffnung war 50 cm.

Zur Anwendung kamen bei den Messungen drei verschiedene Resonatoren, welche im folgenden mit den Buchstaben A, B, C

---

[1]) Die Phänomene kommen allerdings erst dann deutlich zum Vorschein, wenn die Längsrichtung der Resonatoren auf dem Brett der Schwingungsrichtung des Erregers parallel ist. Wird der Schirm in seiner Ebene um 90° gedreht, so bleibt der reflektierte Strahl aus.

Bei senkrechter Inzidenz und paralleler Lage erscheinen Knotenpunkte auf dem Brett sowohl, wie in einem Abstand von 32—38 cm.

bezeichnet werden mögen; diese sekundären Leiter wurden ebenfalls nach den Angaben von Righi konstruiert.

Den Ergebnissen des vorigen Paragraphen entsprechend, wurden die Resonatoren in die Brennlinie von zylindrischen parabolischen Spiegeln S_2 (Fig. 17 u. 18) gesetzt, die aus Kartonpapier angefertigt wurden, auf welches zahlreiche Stanniolstreifen,

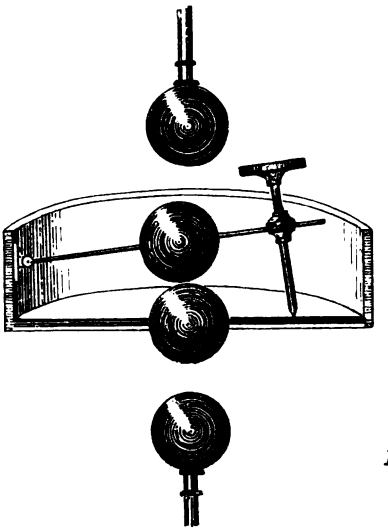


Fig. 16.

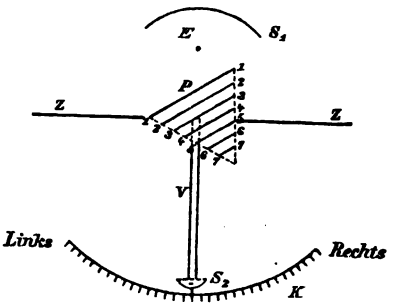


Fig. 17.

in horizontalen Reihen geordnet, parallel zur Brennlinie des Spiegels geklebt waren.[1])

Auf jedem Spiegel stimmten die Stanniolstreifen der Länge und Breite nach mit dem Resonator überein, zu welchem der Spiegel gehörte, so daß dieser selbst aus einer Anzahl Resonatoren bestand.

In der folgenden Tabelle I sind die Konstanten der Spiegel bezw. der Resonatoren gegeben. Die Längen sind in Zentimetern ausgedrückt.

Der sekundäre Spiegel wurde von einem Stativ getragen, welches, mit Rollen versehen, um einen festen Punkt mittels

[1]) Um Fig. 18 nicht allzusehr zu komplizieren, wurden die Resonatoren weggelassen.

Tabelle I.

Resonator	Länge des Resonators	Breite des Resonators	Höhe des Spiegels	Öffnung des Spiegels	Brennweite des Spiegels	Zahl der Resonatorenreihen auf dem Spiegel	Zahl der Resonatoren in einer Reihe	Abstand von zwei nebeneinander liegenden Resonatoren
A	3	0,2	13	10,5	2	3	35	0,2
B	4	0,2	13	11	2	3	38	0,2
C	6	0,3	13	12	2	1	23	0,3

einer starren Verbindung *V* drehbar war. An dem Stativ war ein Zeiger befestigt, der auf einem in Grade geteilten Kreise *K* die Winkelverschiebungen des Resonators abzulesen gestattete.

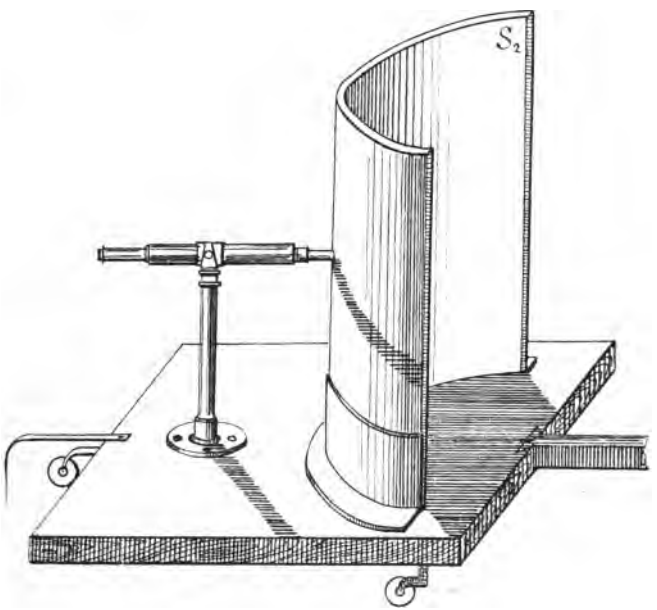


Fig. 18.

Wenn der Resonator dem Erreger gerade gegenüber stand, betrug der Abstand zwischen den beiden Leitern 75 cm; die Funken waren durch ein Mikroskop zu beobachten.

Das Prisma *P* (Fig. 19) bestand aus sieben Glasscheiben, die sämtlich die gleiche Höhe von 35 cm hatten; ihre Breite

betrug der Reihe nach 35, 30, 25, 20, 15, 10, 5 cm. Auf jede Platte waren zahlreiche Resonatoren (Stanniolstreifen, 1,5 cm lang, 0,2 cm breit) in zwölf Parallelreihen festgeklebt. Der Abstand von zwei aufeinander folgenden Reihen betrug 1 cm, der Abstand von zwei benachbarten Resonatoren derselben Reihe 1,3 cm. Die Zahl der Resonatoren in jeder Reihe war hiernach auf den verschiedenen Platten eine verschiedene (21, 18, 15, 12, 9, 6, 3). Das Prisma wurde so aufgestellt, daß die längere Seite der Resonatoren vertikal stand, d. h. parallel der Schwingungsrichtung des primären und sekundären Leiters. Die Platten wurden, einander parallel, vertikal auf einem Holzgestell befestigt, so daß die Resonatoren einen Raum erfüllten, der die Form eines geraden gleichseitigen Prismas hatte. Die drei Seitenflächen hatten, wie aus dem Gesagten sich ergibt, eine Ausdehnung von $(35\text{ cm})^2$. Die Stellung des Prismas war bei allen Versuchen die gleiche, wie sie in der Fig. 17 dargestellt wird. Der Einfallswinkel betrug 40^0, der mittlere Abstand der dem Erreger zugekehrten Prismenfläche von dem Erreger selbst 18 cm. Rechts und links von dem Prisma wurden noch zwei Zinkbleche Z befestigt (Quadrate von 40 cm Seite), um eine Einwirkung von direkten Strahlen zu vermeiden.

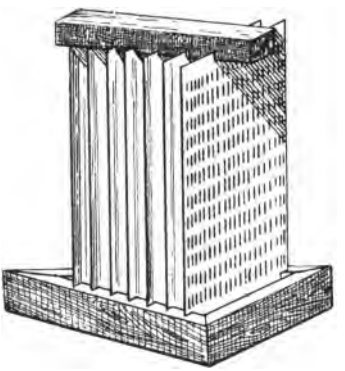


Fig. 19.

Die Beobachtung geschah in der Weise, daß man rechts und links mit (m_r, m_l) und ohne (o_r, o_l) Prisma die Stellungen des Resonators bestimmte, in welchen die sekundären Funken gerade erloschen. Die Ablenkung α ist nicht unmittelbar aus den so gefundenen Zahlen abzuleiten.

Von dem Prisma wird nämlich, abgesehen von der Brechung, eine Absorptionswirkung ausgeübt (diese Vorlesung § 2), infolge deren eine scheinbare Ablenkung α' der Grenzen der wirksamen Strahlung nach der Mittellinie hin eintreten muß. Nun ist es einleuchtend, daß in der getroffenen Anordnung die Wirkungen

der Brechung und der Absorption auf der linken Seite gleiches, auf der rechten entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen.

Man erhält daher:

$$\alpha + \alpha' = m_l - o_l,$$
$$\alpha - \alpha' = m_r - o_r,$$

also:

$$\alpha = \frac{(m_l - o_l) + (m_r - o_r)}{2},$$

$$\alpha' = \frac{(m_l - o_l) - (m_r - o_r)}{2}.$$

Als Beispiel sei hier eine Beobachtungsreihe wiedergegeben.

Tabelle II.

Resonator	$m_l - o_l$	$m_r - o_r$	α	α'
A	15° 18′	1° 30′	8° 24′	6° 24′
B	12° 6′	2° 12′	7° 12′	5°
C	6° 24′	3° 36′	5°	1° 24′

Es folgt hieraus, daß die Brechung sowohl wie die Absorption mit wachsender Wellenlänge abnimmt. Dies ist auch, wie seinerzeit bemerkt wurde (I. Vorlesung § 1 u. 2), bei Licht- und Wärmestrahlung der Fall, wenn man sich nach der Seite der großen Wellen vom Absorptionsstreifen entfernt.[1])

Die verschiedenen Reihen von Beobachtungen, welche von Garbasso und Aschkinass angestellt wurden, stimmten, wie sich erwarten ließ, nicht vollkommen miteinander überein. Denn eine vollständige Reihe bestand aus zwölf einzelnen Beobachtungen, welche insgesamt mindestens eine Viertelstunde Zeit in Anspruch nahmen, und während eines so langen Zeitintervalles funktioniert der Erreger nicht absolut gleichmäßig.

Wir wollen noch einige Beobachtungsreihen für die Ablenkung α mitteilen, um die Grenzen der Genauigkeit der erhaltenen Resultate zu zeigen.

[1]) Was das Gesetz der Absorption für elektrische Strahlen betrifft, so ist dies eine Bestätigung (und zwar eine quantitative) der Resultate, welche im zweiten Paragraph dieser Vorlesung angegeben wurden.

Tabelle III.

Resonator	1	2	3	4	5	Mittelwert
A	9° 18′	9° 36′	9° 24′	8° 24′	8° 36′	9° 6′
B	7° 24′	7° 24′	7° 12′	7° 12′	7° 12′	7° 18′
C	6° 36′	5° 24′	5° 12′	5°	5°	5° 24′

Wie man sieht, ist die Erscheinung dem Gang und der Größenordnung nach ohne Zweideutigkeit festgestellt.

§ 4. Es lag den Verfassern noch daran, durch einen besonderen Versuch den Nachweis zu führen, daß ein aus elektrischen Resonatoren bestehendes Medium, wie es oben beschrieben wurde, auch in anderer als prismatischer Form auf einen Strahl elektrischer Kraft eine brechende Wirkung auszuüben imstande sei. Zu diesem Zweck setzten sie die genannten sieben Platten, aus denen das Prisma bestand, in der in Fig. 20a veranschaulichten Weise zusammen. Wie vorher waren alle Platten einander parallel; auch ihre gegenseitigen Abstände hatten den früheren Wert. Die Resonatoren erfüllten jetzt aber, in vier gleich großen quadratischen Flächen angeordnet, einen Raum von der Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedes, das als eine planparallele Schicht von derselben Materie, aus der früher das Prisma bestand, angesehen werden konnte. Die Dicke dieser Schicht betrug 12 cm, wie aus den oben angegebenen Zahlen sich ergibt. Der ganze Körper wurde so aufgestellt, daß der Einfallswinkel der elektrischen Strahlen wie zuvor 40° betrug. Aus den Beobachtungen mit dem Prisma konnte der ungefähre Wert des Brechungsexponenten der Substanz berechnet werden. Aus diesem, aus der Dicke der planparallelen Schicht und dem Einfallswinkel ließ sich dann die Parallelverschiebung ermitteln, die der austretende Strahl gegen den einfallenden erleiden mußte. Die Messungen, die in derselben Weise wie bei der Untersuchung der prismatischen Brechung ausgeführt wurden, nämlich durch Aufsuchen der Grenzen der wirksamen Strahlung, gaben eine befriedigende Übereinstimmung mit dem berechneten Werte.

Die zuletzt beschriebene Anordnung gestattete auch den Hauptversuch in besonders deutlicher Form zu wiederholen. Stellte man nämlich den Resonator dem Erreger gerade gegen-

über, während die Zinkbleche ZZ so orientiert waren, wie Fig. 20a zeigt, und setzte dann die planparallele Schicht in der Weise zwischen beide Leiter, daß deren Verbindungslinie die Platte 5 etwa in der Mitte schnitt, so konnte man noch schöne Sekundärfunken beobachten. Wurden jetzt die Platten 5, 6, 7 entfernt, wodurch wieder ein prismatischer Körper entstand, so erloschen die Funken sofort, und die Strahlen wurden nach rechts hin abgelenkt. Würden dieselben keine prismatische Brechung erfahren haben, so hätten die Funken

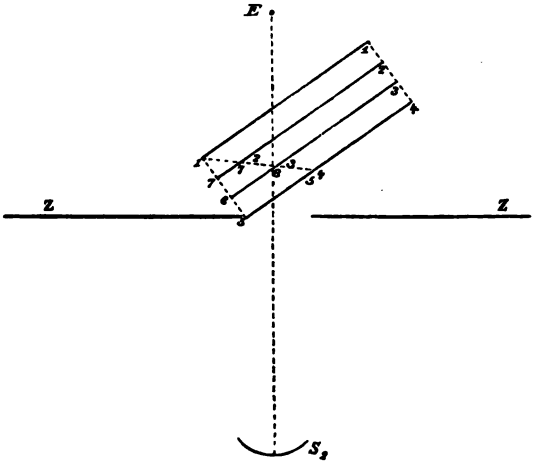


Fig. 20a.

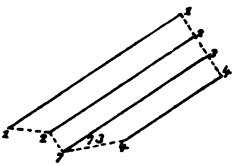


Fig. 20b.

gerade im Gegensatz zu der beobachteten Erscheinung noch intensiver werden müssen, da die Absorptionswirkung des Körpers durch die Entfernung der drei Platten kleiner geworden war.

Garbasso und Aschkinass überzeugten sich noch durch ein weiteres Experiment, daß bei ihren Hauptversuchen die genaue prismatische Form des Mediums eine notwendige Bedingung für das Zustandekommen der Erscheinung war, welche oben beschrieben worden ist.

Wurde nämlich nach Entfernung der Platten 5, 6, 7 aus der Stellung, die Fig. 20a zeigt, die siebente Platte neben die dritte gestellt, die letztere also durch drei Vertikalreihen von Resonatoren vergrößert, so daß der Körper eine Gestalt annahm, wie die in Fig. 20b dargestellte, so erhielten die Ver-

fasser keine deutliche prismatische Brechung mehr. Nach den Ergebnissen der besprochenen Untersuchungen stellt also ein System von Hertzschen Resonatoren einen gewöhnlichen Körper dar. Es handelt sich dabei um einen Körper, der einen einzigen Absorptionsstreifen besitzt.

Dritte Vorlesung.

Die optische Resonanz.

§ 1—5. Versuche von Rubens und Nichols über sehr lange Wärmewellen. — § 6. Versuche von Wood über optische Resonanz. — § 7. Versuche von Kossonogoff. — § 8. Kontrollversuche von Scotti. —

§ 1. Die Reflexionsversuche, die wir im zweiten Paragraph der vorigen Vorlesung beschrieben haben, wurden von Rubens und Nichols mit langen Wärmewellen wiederholt; dieser Untersuchung kommt insofern eine fundamentale Bedeutung zu, als sie den ersten direkten Beweis für die elektromagnetische Natur der Lichtstrahlung lieferte.

Bei den Versuchen von Rubens und Nichols kamen die sogenannten Reststrahlen des Flußspates zur Anwendung. Es ist seinerzeit bemerkt worden, daß ein Körper, welcher eine Oberflächenfarbe besitzt, hauptsächlich Strahlen von jener bestimmten Länge reflektiert. Flußspat hat nun eine derartige Farbe, doch entspricht sie einer Spektrallinie, welche fern im ultraroten Gebiet liegt. Werden daher Wärmestrahlen wiederholt an Flußspatflächen reflektiert, so wird allmählich die Strahlung zu einer monochromatischen, und zwar mit der Wellenlänge von etwa 23,7 μ (Tausendstel von einem Millimeter).

Bei der Versuchsanordnung von Rubens und Nichols (Fig. 21) waren die Wärmestrahlen von einer Zirkonlampe (a) erregt und fielen dann auf einen Hohlspiegel b, der sie zu konvergierenden machte, so daß genau auf dem Spalt eines Spektrometers s_1 ein reelles Bild der Quelle entstand.

p_1, p_2, p_3 und p_4 stellen in der Figur vier polierte Flächen von Flußspat dar; nach den wiederholten Spiegelungen ist also der in s_1 einfallende Strahl ein monochromatischer. Es ist aber zu bemerken, daß der genannte Strahl noch von einer

Glasfläche *d*, unter einem Winkel von 69° reflektiert wird, wodurch er als in der Reflexionsebene polarisiert erscheint. Zu *r* wird nun der Spiegel, der zur Untersuchung kommt, aufgestellt; dabei ist *v* ein Schirm, welcher der Strahlung eine scharfe Begrenzung gibt, und s_1 *g* s_2 der Spektralapparat. Durch den Hohlspiegel *c* werden endlich die Strahlen auf die

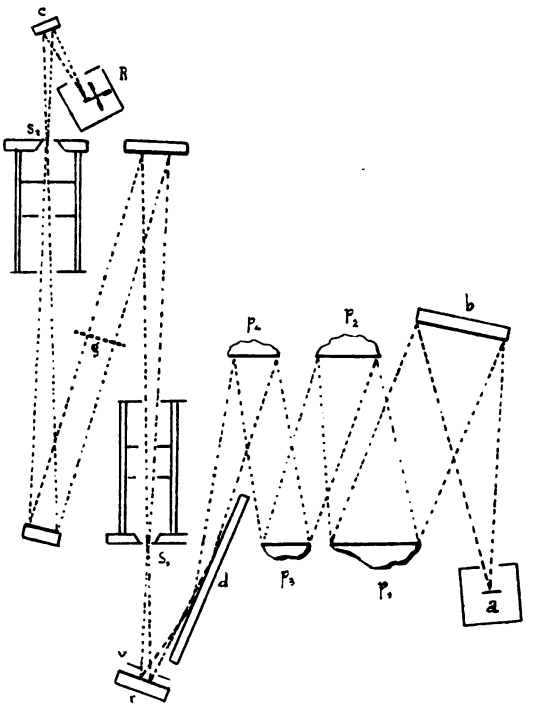


Fig. 21.

Flügel eines Radiometers (*R*) konzentriert, das mit seinen Ablenkungen ein Maß für die einfallende Energie liefert.

§ 2. Die Herstellung von Resonatoren für die Reststrahlen des Flußspates, nach dem Vorbild der Apparate, welche wir in der vorigen Vorlesung (§ 2, Fig. 15) beschrieben haben, würde ja, wegen der äußerst kleinen Dimensionen, die man ihnen zu erteilen hätte, auf recht große Schwierigkeiten stoßen.

Dies läßt sich nun am besten erreichen, wenn als Resonatoren rechteckige lange und schmale metallische Streifen zur Anwendung kommen, etwa wie es bei den Versuchen von

Garbasso und Aschkinass über Brechung und Dispersion der elektrischen Strahlen der Fall war.

Für solche Resonatoren hat nun Righi gefunden, daß sie eine bessere Resonanz zeigen, wenn ihre Länge einem ganzzahligen Vielfachen einer halben Wellenlänge angenähert gleich ist, als wenn jene ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge beträgt.

An dieser Stelle können wir nun nicht weiter auf theoretische Betrachtungen eingehen, und es möge nur bemerkt werden, daß ein streifenförmiger Resonator in genau derselben Weise wie eine offene Pfeife zu berechnen ist. Die Hauptschwingung entspricht demnach einer Wellenlänge, deren Hälfte eben der Länge des Resonators gleicht.

Nach dem Gesagten läuft also unsere Aufgabe darauf hinaus, metallische Streifen herzustellen, deren Dimensionen von der Größenordnung von etwa $24\,\mu$ sind. Eine stark ausgesprochene Reflexion haben wir dann für den Fall zu erwarten, daß die Länge der Streifen $^1/_2 \cdot 24\,\mu = 12\,\mu$ beträgt.

§ 3. Die genannte Aufgabe haben nun Rubens und Nichols in folgender Weise mit großem Geschick lösen können.

Eine Anzahl auf chemischem Wege frisch versilberter ebener Glasplatten wurde auf der Teilmaschine mit Hilfe eines mit Diamantspitze versehenen Stichels in Gitter verwandelt, welche 100 Striche pro Millimeter enthielten. Die Breite der Striche wurde hierbei möglichst derjenigen der übrig bleibenden Silberstreifen gleich gemacht, so daß sowohl die Striche als die Silberstreifen je $5\,\mu$ breit waren. Es läßt sich dies durch sorgfältige Auswahl der Spitze und genaue Regulierung des Druckes für Silberschichten von gleichmäßiger Kohärenz in jedem einzelnen Falle mit genügender Genauigkeit erreichen.

Die so erhaltenen Gitter wurden dann, wiederum mit Hilfe der Teilmaschine, durch Striche, welche senkrecht zu den ersten geführt waren, in Resonatoren von verschiedener, aber für jedes einzelne Gitter möglichst gleicher Länge zerschnitten.

Genauere Angaben über die Länge und Breite der Resonatoren, sowie über die Anzahl derselben pro Quadratzentimeter finden sich für die verschiedenen Platten in der weiter unten gegebenen Tabelle.

Mit Hilfe der Versuchsanordnung, welche in Fig. 21 dar-

gestellt ist, und die im ersten Paragraph dieser Vorlesung eingehend beschrieben wurde, haben nun Rubens und Nichols das Reflexionsvermögen der Resonatorenplatten mit demjenigen des metallischen Silbers verglichen, welches nach früheren Bestimmungen derselben Verfasser gleich 100 zu setzen ist.

§ 4. Zur Untersuchung gelangten im ganzen fünf Resonatorenplatten, wovon eine, ein noch unzerschnittenes Gitter, Resonatoren von praktisch unendlich großer Länge enthielt. Die übrigen vier Platten waren mit Resonatoren versehen, deren Länge angenähert um den gleichen Betrag ($6\,\mu$) von Platte zu Platte variierte. Die Größe der in Resonatoren abgeteilten Fläche betrug auf jeder Platte $(1{,}5\text{ cm})^2 = 2{,}25$ qcm; daß nicht eine größere Zahl von Resonatorenplatten zur Untersuchung herangezogen wurde, was in mancher Beziehung wünschenswert gewesen wäre, liegt an der großen Schwierigkeit der Herstellung solcher Präparate, was hauptsächlich in der ungleichmäßigen Kohärenz der Silberschichten seinen Grund hat.

Bei weitem der größte Teil der nach der oben beschriebenen Methode hergestellten Resonatorenplatten erwies sich nach der Fertigstellung als unbrauchbar, weil entweder der Stichel nicht an allen Stellen das Silber durchgeschnitten hatte, oder weil das Metall an manchen Stellen völlig entfernt war. Auch bei den schließlich zur Untersuchung gelangten Platten waren die Resonatoren keineswegs an allen Stellen intakt; jedoch war die Zahl der zerstörten oder beschädigten Resonatoren bei den mit I—IV einschließlich bezeichneten Platten zu gering, um einen merklichen Einfluß auf das Resultat hervorbringen zu können. Bei Platte V dagegen waren schon nahezu 10 Proz. der gesamten Resonatoren zerstört, so daß hier zweifellos die gemessenen Reflexionswerte zu klein ausgefallen sind.

Eine zweite Ursache, welche ebenfalls in dem Sinne wirkt, das Reflexionsvermögen der Resonatorenplatte V in beiden Lagen zu klein erscheinen zu lassen, ist die hier auftretende Beugung, von welcher die Resonatorenplatten I—IV inkl. vollkommen frei sind. Die Länge der Resonatoren auf Platte V, vermehrt um die Stichbreite, überschreitet nämlich bereits die mittlere Wellenlänge der auffallenden Strahlen um einen kleinen

Betrag, so daß hier die Beugungsbilder erster Ordnung auftreten. Die beobachtete Intensität der reflektierten Strahlen muß daher um die Energie dieser gebeugten Strahlen zu klein ausfallen.

Bei sämtlichen fünf Platten wurde das Reflexionsvermögen in zwei verschiedenen Lagen beobachtet, nämlich erstens, wenn die Längsrichtung der Resonatoren mit der Schwingungsrichtung der elektrischen Komponente der Strahlung zusammenfiel und zweitens, wenn diese beiden Richtungen einen rechten Winkel miteinander bildeten. Über die Ergebnisse der Versuche und über die charakteristischen Daten der einzelnen Resonatorenplatten gibt die folgende Tabelle Aufschluß.

Tabelle I.

Nummer der Resonatorenplatte	I	II	III	IV	V
Zahl der Resonatoren pro Quadratzentimeter	1.10^8	1000.10^8	572.10^8	400.10^8	333.10^8
Länge der Resonatoren . . .	∞	$6{,}5\,\mu$	$12{,}4\,\mu$	$18{,}0\,\mu$	$24{,}4\,\mu$
Breite der Resonatoren . . .	$5{,}8\,\mu$	$4{,}6\,\mu$	$5{,}3\,\mu$	$5{,}1\,\mu$	$5{,}5\,\mu$
Reflexionsvermögen (elektrische Komponente senkrecht zur Längsrichtung)	40,8	38,3	42,7	40,7	36,1
Reflexionsvermögen (elektrische Komponente parallel zur Längsrichtung)	83,7	41,8	65,8	49,5	62,5

§ 5. Wir können die hier erhaltenen Werte für das Reflexionsvermögen der Resonatorenplatten als zusammengesetzt ansehen aus zwei Bestandteilen, von welchen der eine von der Reflexion der Resonatoren selbst, der andere von derjenigen des Glases herrührt. Dieser letztere Teil ist keineswegs unbedeutend und beträgt in dem vorliegenden Fall 24,7 Proz., wie durch wiederholte Versuche an Glasplatten von gleichem Material festgestellt wurde. Um nun das Reflexionsvermögen der von ihrer Unterlage befreiten Resonatoren von der Glasreflexion zu trennen, können wir folgenden Weg einschlagen.

Es sei α das beobachtete Reflexionsvermögen der Resonatorenplatte in Prozent der auffallenden Strahlung, so entfallen

hiervon β-Proz. auf die Reflexion an den Resonatoren und γ-Proz. auf diejenigen des Glases. Es ist dann:

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

Von den nicht an den Resonatoren reflektierten $100 - \beta$-Proz. der auffallenden Strahlung werden am Glas 24,7 Proz. reflektiert, man erhält somit:

$$\gamma = (100 - \beta)\ 0{,}247,$$

und folglich:

$$\beta = \frac{\alpha - 24{,}7}{0{,}753}.$$

Diese Übertragung setzt allerdings voraus, daß erstens die Resonatoren die Strahlung nicht merklich absorbieren und daß zweitens die Reflexion von den Resonatoren und der Glasfläche unabhängig voneinander vor sich geht, was beides nicht erwiesen ist. Die Formel gilt daher nur für die Grenzen $\beta = 0$ und $\beta = 100$ vollkommen streng, und darf dazwischen vorläufig nur als Interpolationsformel angesehen werden, welche die Verhältnisse in erster Annäherung richtig darstellt. Wendet man die Formel zur Umrechnung der in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Werte von α an, so erhält man für β folgende Werte:

Tabelle II.

Nummer der Resonatorenplatte	I	II	III	IV	V
β (elektrische Komponente senkrecht zur Längsrichtung der Resonatoren)	21,4	18,1	23,9	21,3	15,3
β (elektrische Komponente parallel zur Längsrichtung der Resonatoren)	78,4	22,7	54,5	32,9	50,2

Ein Blick auf diese Tabelle läßt zunächst erkennen, daß die Zahlen der ersten Horizontalreihe, welche das Reflexionsvermögen der Resonatoren enthält, wenn der elektrische Vektor senkrecht zur Längsdimension der Resonatoren gerichtet ist, sich nur um relativ geringe Beträge voneinander unterscheiden. Sämtliche Werte liegen innerhalb der Grenzen 23,9 u. 15,3 Proz. und, wenn man von der Resonatorenplatte V absieht (deren Reflexionsvermögen aus oben angegebenen Gründen zu klein

ausfallen muß), sogar zwischen 23,9 u. 18,1 Proz. Dagegen weisen die Zahlen der zweiten Horizontalreihe, welche das Reflexionsvermögen der Resonatoren für den Fall angeben, daß diese mit dem elektrischen Vektor gleiche Richtung besitzen, sehr beträchtliche Unterschiede auf, und zwar sowohl untereinander als auch gegenüber den Zahlen der ersten Reihe.

Das Ergebnis dieser Vergleichung läßt sich in die folgenden drei Sätze zusammenfassen:

1. Sämtliche Resonatoren besitzen ein stärkeres Reflexionsvermögen, wenn die Richtung des elektrischen Vektors mit ihrer Längsrichtung übereinstimmt als im umgekehrten Falle.

2. Die Resonatoren der Platten I, III u. V reflektieren die auffallende Strahlung erheblich stärker als diejenigen der Platten II u. IV, wenn die Richtung des elektrischen Vektors der Längsausdehnung der Resonatoren parallel ist (im anderen Falle ist der Unterschied gering).

3. Das stärkste Reflexionsvermögen zeigen unter diesen Bedingungen die Resonatoren der Platte I, welche im Vergleich mit der Wellenlänge als unendlich lang anzusehen sind ($l = 600\,\Lambda$). Mit den Forderungen der elektromagnetischen Theorie des Lichtes sind diese Resultate in durchaus befriedigender Weise in Einklang zu bringen. Die unendlich langen Resonatoren der Platte I sind unter allen Umständen als vollkommen resonanzfähig zu betrachten, da für jede auffallende Strahlengattung die Zahl der auf jedem Resonator sich bildenden Knoten und Bäuche so groß ist, daß die Gesamtlänge mit genügender Annäherung als ein ganzzahliges Vielfaches eines einzigen Knotenabstandes angesehen werden kann. Übrigens steht das angegebene Resultat mit einem wohlbekannten Hertzschen Versuch in bester Übereinstimmung.

Es stimmen ferner die Ergebnisse, die die anderen Resonatorenplatten betreffen, mit den Resultaten von Righi (diese Vorlesung § 2) vollkommen überein. Wie es nach der Theorie vorauszusehen war, zeigt ja Platte III das größte Reflexionsvermögen (man vergleiche hierüber die XV. Vorlesung § 1).

Nach den beschriebenen Versuchen ist also die elektrische Resonanz der Wärmestrahlen als eine sicher festgestellte Tatsache anzusehen.

§ 6. Es lag nun der Gedanke nahe, die Untersuchung von Rubens und Nichols auf das sichtbare Spektralgebiet auszudehnen. Damit würde man Gebilde herstellen, welche beim Auffallen des Lichtes eine glänzende metallische Farbe (sogenannte Schillerfarbe) zeigen müßten.

Die Resonatoren, die man aus den Platten zu schneiden hätte, damit die Periode der Eigenschwingungen einer sichtbaren Welle entspräche, sind aber von äußerst kleinen Dimensionen. Bedenkt man nämlich, daß die ausgestrahlte Wellenlänge mit den linearen Dimensionen des schwingenden Gebildes einfach proportional variiert, so zeigt es sich, daß für gelbe (Natrium-) Wellen eine Resonatorenlänge zu nehmen ist, welche etwa (23,7/0,6 =) 40mal kleiner wäre wie die entsprechende, von Rubens und Nichols auf Platte III erhaltene.

Diese Aufgabe ist aber auch mit der besten Teilmaschine und der feinsten Diamantspitze nicht mehr zu erfüllen. Glücklicherweise fand nun Prof. R. W. Wood, der Nachfolger von Rowland in Baltimore, eine Methode, welche wirkliche Resonatoren für Lichstrahlen herzustellen gestattet.

Beim Arbeiten über die anomale Dispersion und selektive Absorption von Metalldämpfen fiel genanntem Forscher auf, daß sich manchmal auf die Wände des Ballons, der zur Erwärmung diente, äußerst dünne Schichten mit glänzenden Prachtfarben niedersetzten. Dabei zeigten die Schichten im durchgehenden Lichte eine der reflektierten komplementäre Farbe.

Herr Wood überzeugte sich bald, daß dies Phänomen einer Resonanzwirkung zuzuschreiben ist, und wies durch mikroskopische Beobachtungen nach, daß die Schichten sich in kugelförmige Kerne auflösen lassen, deren Dimensionen mit der Länge der zurückgeworfenen Wellen einfach zusammenhängen.

Damit war die Lehre der sogenannten optischen Resonanz begründet.

§ 7. Die Versuche von Wood wurden von J. Kossonogoff wiederholt und erweitert.

Dieser Forscher fand, daß bei den Anilinfarben im festen Zustande, sowie bei den Schuppen der Schmetterlinge Kerne nachzuweisen sind, und schrieb daher die metallischen Farben, welche derartige Gebilde zeigen, der optischen Resonanz zu.

Seine Ergebnisse faßte er in folgende Sätze zusammen:

1. Anilinfarben enthalten Kerne, deren Durchmesser der Hälfte der reflektierten Wellenlänge gleichen.

2. Bei Schmetterlingsschuppen stimmt dagegen der Korndurchmesser einfach mit der Länge der Wellen überein.

§ 8. Das erste Resultat von Kossonogoff wurde nun von C. Scotti bestritten, das zweite aber durch mikrophotographische Aufnahmen bestätigt.

Wird ein Tropfen von einer wässrigen oder alkoholischen Lösung einer Anilinfarbe auf einer Glasplatte eingetrocknet, so entsteht gewöhnlich eine kleine, farbige Scheibe, die, durch das Mikroskop betrachtet, als von lauter linsenförmigen Körnern gebildet sich zeigt. Am besten tritt das Phänomen hervor, wenn die Platte vorher durch Betasten mit den Fingern ein wenig geschmiert wurde.

Herr Scotti hat derartige Präparate mit einem mikrophotographischen Apparat von Leitz in Wetzlar aufgenommen und jedesmal dabei, um die Vergrößerung berechnen zu können, ein Objektivmikrometer (ein in Hundertel geteiltes Millimetergitter) photographiert.

Die Fig. 22a und b zeigen als Beispiel, in reeller Größe, das aufgenommene Präparat für eine Erytrosinlösung und das

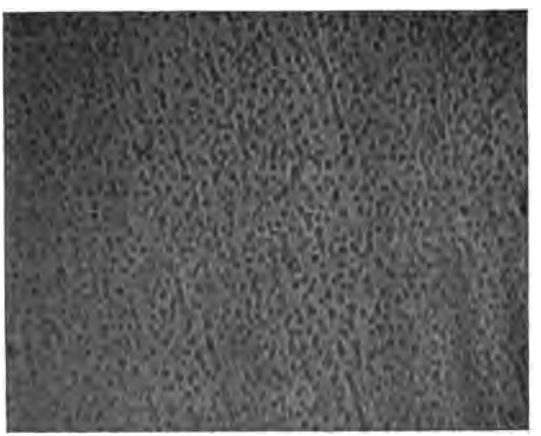


Fig. 22a.

zugehörige Mikrometerbild; hieraus läßt sich leicht die Körnergröße (resp. der Körnerdurchmesser) zu 0,00189 mm berechnen.

Die Dimension der Kerne entspricht also der halben Wellenlänge der reflektierten (grünen) Farbe keineswegs.

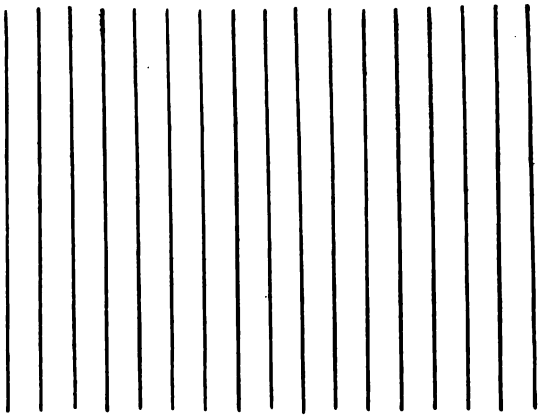


Fig. 22b.

Fig. 23a und b gehören einer Aufnahme von der Schuppe eines Tagesschmetterlings des wohlbekannten Geschlechtes

Fig. 23a.

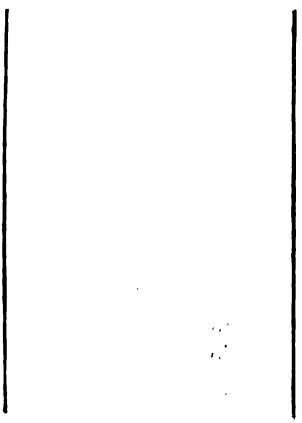


Fig. 23b.

Lycaena; es handelt sich um die Schuppe eines Männchens, die im reflektierten Licht hellblau erscheint.

Für die Größe der Kerne erhält man 0,00045 mm, was eben gleich der Länge einer blauen Welle ist.

Ob diese Tatsachen wirklich eine Resonanzwirkung festzustellen gestatten, möge aber erst später untersucht werden (XV. Vorl. § 3 u. f.).

Vierte Vorlesung.

Mathematische Hilfssätze.

§ 1—2. Lagrangesche Gleichungen der Bewegung. — § 3—4. Symbolisches Integrationsverfahren für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. — § 5—6. Der Gaußsche Satz. — § 7—8. Der Stokesche Lehrsatz. — § 9. Der Greensche Satz.

§ 1. Die gegenwärtige Lage, resp. der gegenwärtige Zustand eines in Bewegung begriffenen Systems, werden durch eine (endliche) Anzahl von Variabeln, den sogenannten Koordinaten, bestimmt. Die Koordinaten bezeichnen wir mit $q_1 \cdot q_2 \dots q_\nu \dots q_n$.

Die Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit mögen Geschwindigkeiten heißen: die Geschwindigkeiten bezeichnen wir mit $\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \dots \dot{q}_\nu \dots \dot{q}_n$. Wir setzen also:

$$\dot{q}_\nu = \frac{d q_\nu}{d t} \qquad (\nu = 1 \cdot 2 \dots n).$$

Die kinetische Energie irgendeines Systems kann und soll als eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten betrachtet werden; die kinetische Energie bezeichnen wir mit T.

Die potentielle Energie kann und soll als eine quadratische Funktion der Koordinaten betrachtet werden; die potentielle Energie bezeichnen wir mit U.

Die Dissipationsfunktion ist die Hälfte aus dem Energiequantum, das in jeder Zeiteinheit durch Reibung und reibungsähnliche Erscheinungen zerstört und in Wärme umgewandelt wird; die Dissipationsfunktion bezeichnen wir mit V.

Sie kann und soll als eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten betrachtet werden.

§ 2. Die Gleichungen der Bewegung für ein freies System schreibt man nun, nach Lagrange, in der Form

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \frac{\partial U}{\partial q_\nu} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1.2 \ldots n).$$

Wie von Maxwell gezeigt worden ist, gelten diese Gleichungen für ganz allgemeine Systeme. Wir können z. B. die elektrischen Ladungen gewisser Leiter als Koordinaten einführen, dann sind natürlich die entsprechenden Geschwindigkeiten als Stromintensitäten zu betrachten.

Ist die Koordinate q_ν keine freie, sondern eine von äußeren Kräften beeinflußte, so ist die Bewegungsgleichung in der Form

$$(1') \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \frac{\partial U}{\partial q_\nu} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\nu} = Q_\nu$$

zu schreiben, wo Q_ν eben die äußere Kraft bedeutet.

§ 3. Ist die kinetische Energie von den Koordinaten unabhängig, so liefert Formel (1) ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ein solches System wollen wir jetzt näher betrachten.

Es seien also $n + 1$ gewöhnliche Differentialgleichungen gegeben, und angenommen sei, daß sie in einer linearen homogenen Form $n + 1$ Funktionen und ihre Ableitungen nach einer Variabeln t, bis zur Ordnung s enthalten. Dabei werden die Koeffizienten als konstante Größen angesehen.

Bezeichnen wir mit

$$y_1 \cdot y_2 \cdots y_\nu \cdots y_n \text{ und } z$$

die unbekannten Funktionen, so können die gegebenen Gleichungen in die Form

$$(2) \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\mu,\nu} y_\nu + \sum_1^n{}_\nu \sum_1^s{}_\sigma \beta_{\mu,\nu,\sigma} \frac{d^\sigma y_\nu}{dt^\sigma} + \gamma_\mu z + \sum_1^s{}_\sigma \delta_{\mu,\sigma} \frac{d^\sigma z}{dt} = 0$$

$$(\mu = 1.2 \ldots n + 1)$$

gebracht werden. Hier sind mit $\alpha_{\mu,\nu} \cdot \beta_{\mu,\nu,\sigma} \cdot \gamma_\mu$ und $\delta_{\mu,\sigma}$ konstante Größen gemeint.

Der Einfachheit halber setzen wir

$$\frac{d}{dt} = D,$$

also:

$$\frac{d^\sigma}{dt^\sigma} = D^\sigma,$$

und führen noch die Bezeichnungen

$$\alpha_{\mu,\nu} + \sum_1^s{}_\sigma \beta_{\mu,\nu,\sigma} D^\sigma = A_{\mu,\nu},$$

und

$$\gamma_\mu + \sum_1^s{}_\sigma \delta_{\mu,\sigma} D^\sigma = B_\mu,$$

ein.

Damit nehmen die Gleichungen (2) die einfache Form

$$\sum_1^n{}_\nu A_{\mu,\nu} y_\nu + B_\mu z = 0 \tag{2'}$$

$$(\mu = 1, 2 \ldots n+1)$$

an.

Diese dürfen wir aber als $n+1$ algebraische lineare Gleichungen für die y_ν betrachten; ihr Gleichsein bedingt daher das Nullwerden der Determinante, welche mit den Koeffizienten und den unabhängigen Gliedern zu bilden ist.

So erhält man:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu} & A_{1,\nu+1} & \ldots A_{1,n} & B_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu} & A_{2,\nu+1} & \ldots A_{2,n} & B_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \ldots A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu} & A_{\mu,\nu+1} & \ldots A_{\mu,n} & B_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \ldots A_{n+1,\nu-1} & A_{n+1,\nu} & A_{n+1,\nu+1} & \ldots A_{n+1,n} & B_{n+1} \end{vmatrix} z = 0; \tag{3}$$

in dieser Gleichung bedeutet nun die Determinante eine Operation, welche auf die Funktion z anzuwenden ist.

Die Zulässigkeit des Verfahrens erkennt man dadurch, daß, wenn die (2') nach der gegebenen Regel behandelt werden, man überhaupt dieselben Operationen ausführt, welche nach den gewöhnlichen Methoden zur Elimination der unbekannten Funktionen bis auf eine führen.

Es ist natürlich bei der Rechnung zu bedenken, daß die Regeln der Multiplikation auf den Operator D anzuwenden sind, indem man der Potenz D^σ den festgestellten Sinn zuschreibt.

Das z ist nun in den Gleichungen (2') in keiner Weise bevorzugt; Gleichung (3) wird also für jedes y_ν gelten.

Wir führen daher die Elimination aus, indem wir bei jeder unbekannten Funktion die Determinante der Koeffizienten anwenden.

UNIVERSITY

§ 4. Aus (3) folgt nun

$$z = \sum_{1}^{p} {}_{\pi} C_{\pi} e^{c_{\pi} t} \tag{4}$$

$$p = s(n+1)$$

wo die C_{π} Integrationskonstanten sind, und die c_{π} als Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu} & A_{1,\nu+1} & \dots A_{1,n} & B_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu} & A_{2,\nu+1} & \dots A_{2,n} & B_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \dots A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu} & A_{\mu,\nu+1} & \dots A_{\mu,\nu} & B_{\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \dots A_{n+1,\nu-1} & A_{n+1,\nu} & A_{n+1,\nu+1} & \dots A_{n+1,n} & B_{n+1} \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

zur Bestimmung kommen. Dabei ist offenbar D als eine Unbekannte, und nicht mehr als ein Operationszeichen zu betrachten.

Dies vorausgesetzt, nehmen wir die n ersten unter den Gleichungen (2') und lösen sie als algebraische Gleichungen für die y_{ν}.

Es wird

$$y_{\nu} = \frac{(-1)^{\nu}}{\Delta} \begin{vmatrix} B_1 & A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,\nu-1} & A_{1,\nu+1} & \dots & A_{1,n} \\ B_2 & A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,\nu-1} & A_{2,\nu+1} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{\mu} & A_{\mu,1} & A_{\mu,2} & \dots & A_{\mu,\nu-1} & A_{\mu,\nu+1} & \dots & A_{\mu,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n & A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,\nu-1} & A_{n,\nu+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix} z,$$

mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{\mu,1} & \dots & A_{\mu,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}^{1}),$$

[1]) Das Dividieren durch eine Funktion des Operators D erhält dadurch einen Sinn, daß wir als Definition

$$[f^{-1}(D) \cdot f(D)]\, y = y$$

setzen.

Ist z. B.

$$y = e^{ct},$$

oder beim Einsetzen des Wertes von z

$$(4)\quad \begin{cases} y_\nu = (-1)^\nu \sum_1^p{}_\pi \dfrac{C_\pi e^{c_\pi t}}{\Delta(c_\pi)} \\ \cdot \begin{vmatrix} B_1(c_\pi) & A_{1,1}(c_\pi) & \dots & A_{1,\nu-1}(c_\pi) & A_{1,\nu+1}(c_\pi) & \dots & A_{1,n}(c_\pi) \\ B_2(c_\pi) & A_{2,1}(c_\pi) & \dots & A_{2,\nu-1}(c_\pi) & A_{2,\nu+1}(c_\pi) & \dots & A_{2,n}(c_\pi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_\mu(c_\pi) & A_{\mu,1}(c_\pi) & \dots & A_{\mu,\nu-1}(c_\pi) & A_{\mu,\nu+1}(c_\pi) & \dots & A_{\mu,n}(c_\pi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B\ (c_\pi) & A_{n,1}(c_\pi) & \dots & A_{n,\nu-1}(c_\pi) & A_{n,\nu+1}(c_\pi) & \dots & A_{n,n}(c_\pi) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Mit den Bezeichnungen $A_{\mu,\nu}(c_\pi)$, $B_\mu(c_\pi)$ und $\Delta(c_\pi)$ soll angedeutet werden, daß man in die $A_{\mu,\nu}$ und B_μ der Reihe nach für D die p-Wurzeln der Gleichung (5) zu setzen hat.

Die Gleichungen (4) geben nun in einer einfachen Form die Integrale der Gleichungen (2) oder, besser gesagt, (2'). Die Lösungen hängen offenbar von den C_π ab. Zur Bestimmung dieser Konstanten genügt es aber die Anfangswerte der y_ν u. z sowie ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $s-1$ anzugeben; damit werden

$$n + 1 + (s-1)(n+1) = s(n+1) = p$$

lineare und, im allgemeinen Falle, nicht homogene Bedingungen zwischen den p Integrationskonstanten eingeführt.

Sehr oft ist es jedoch nicht unentbehrlich, die Konstanten zu bestimmen, und die Integrale (4) vollständig zu bilden;

---

und bezeichnet man mit $f(D)$ die Summe $\sum_\sigma K_\sigma D^\sigma$, so wird gleich

$$\frac{y}{f(D)} = \frac{e^{ct}}{f(D)} = \frac{e^{ct}}{f(c)}.$$

Wir haben nämlich

$$f(D)\, e^{ct} = \sum_\sigma K_\sigma D^\sigma e^{ct} = \sum_\sigma K_\sigma c^\sigma e^{ct},$$

und, nach der Definition

$$\frac{f(D)\, e^{ct}}{f(D)} = e^{ct},$$

also:

$$\frac{\sum_\sigma K_\sigma c^\sigma e^{ct}}{f(D)} = e^{ct},$$

und endlich

$$\frac{e^{ct}}{f(D)} = \frac{e^{ct}}{\sum_\sigma K_\sigma c^\sigma} = \frac{e^{ct}}{f(c)},$$

was eben zu beweisen war.

man wird vielmehr auf eine qualitative Beschreibung des Phänomens und hauptsächlich auf die Berechnung der Schwingungsperioden sich beschränken können. Das ist erreicht, wenn die Charakteristik (5) gebildet und gelöst worden ist.

§ 5. Sehr oft werden wir von zwei Lehrsätzen Gebrauch machen müssen, welche das Umformen der Integrale und das Herabsetzen ihrer Ordnungen angeben. Der eine ist der wohlbekannte Gaußsche Lehrsatz, wonach man ein Raumintegral zu einem Flächenintegral umformt; der andere aber der Stokessche Satz, nach welchem die Flächenintegrale zu Linienintegralen werden können.

Um den Gaußschen Lehrsatz abzuleiten, betrachten wir das Raumintegral

$$I = \int \frac{\partial X}{\partial x} d\tau = \iiint \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy\, dz .$$

Durch Integration nach der Koordinate x erhält man

$$I = \iint (X)_0^1 dy\, dz = \iint X_1 dy\, dz - \iint X_0 dy\, dz,$$

wenn mit 0 und 1 der kleinere und der größere Wert von x bezeichnet werden, welche zu einem gewissen Wertepaare (y, z) gehören.

Ist nun n die äußere Normale zur Fläche σ, die den Raum τ umhüllt, so wird

$$I = \int X \cos(n, x)\, d\sigma .$$

Hiernach darf man auch

$$(6) \quad \begin{cases} \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) d\tau = \iint [X \cos(n, x) \\ + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)]\, d\sigma \end{cases}$$

schreiben, was eben dem Gaußschen Lehrsatz entspricht.

§ 6. Setzt man übrigens

$$X = FU, \qquad Y = GV, \qquad Z = HW,$$

und nimmt an, daß, auf der Fläche σ, $F.G$ und H überall gleich null sind, so wird

$$\int\left[\frac{\partial(FU)}{\partial x}+\frac{\partial(GV)}{\partial y}+\frac{\partial(HW)}{\partial z}\right]d\tau,$$

$$=\int\left(F\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial F}{\partial x}+G\frac{\partial V}{\partial y}+V\frac{\partial G}{\partial y}+H\frac{\partial W}{\partial z}+W\frac{\partial H}{\partial z}\right)d\tau,$$

$$=\int[FU\cos(n,x)+GV\cos(n,y)+HW\cos(n,z)]\,d\sigma=0.$$

also:

$$(6')\qquad\begin{cases}\int\left(F\frac{\partial U}{\partial x}+G\frac{\partial V}{\partial y}+H\frac{\partial W}{\partial z}\right)d\tau\\ =-\int\left(U\frac{\partial F}{\partial x}+V\frac{\partial G}{\partial y}+W\frac{\partial H}{\partial z}\right)d\tau.\end{cases}$$

§ 7. Es seien jetzt in der Koordinatenebene xy eine geschlossene Linie s und ein Vektor $\mathfrak{C}$ mit den Komponenten $X.Y$ gegeben, und das Integral

$$\iint\frac{\partial X}{\partial y}dx\,dy$$

der Linie entlang in Richtung des Pfeiles (Fig. 24) ausgeführt.

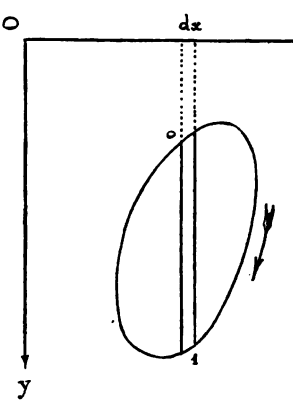


Fig. 24.

Es wird, wie vorher

$$\iint\frac{\partial X}{\partial y}dx\,dy=\int(X)_0^1\,dx,$$

$$=\int X_1\,dx-\int X_0\,dx,$$

also

$$\iint\frac{\partial X}{\partial y}dx\,dy=-\int X\cos(ds,x)\,ds.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$\iint\frac{\partial Y}{\partial x}dx\,dy=+\int Y\cos(ds,y)\,ds,$$

und folglich, für die Ebene

$$\iint\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy=\int[X\cos(ds,x)+Y\cos(ds,y)]\,ds,$$
$$=\int\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}\right)ds,$$
$$=\int(X\,dx+Y\,dy).$$

Damit wird also das Linienintegral des Vektors $\mathfrak{C}$, d. h. $\int(Xdx+Ydy)$, zu einem Flächenintegral umgeformt.

§ 8. Es sei wieder der Vektor $\mathfrak{C}$ gegeben, im Raume aber durch die drei Komponenten $X.Y.Z$ definiert.

Wir betrachten das Tetraeder $OABC$ (Fig. 25), dessen

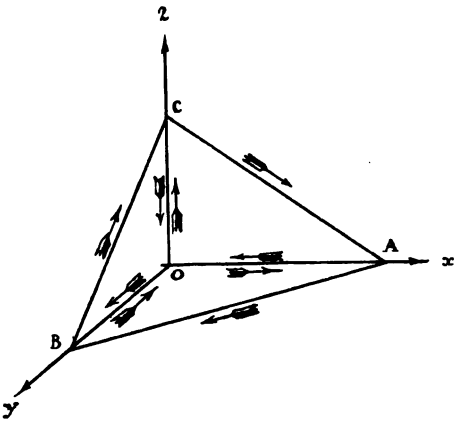


Fig. 25.

drei Kanten $OA.OB.OC$ mit den Koordinatenachsen kongruent sind, und schreiben die identische Gleichung

$$\int_{ABCA}(Xdx+Ydy+Zdz)=\int_{OBCO}(Xdx+Ydy+Zdz)$$
$$+\int_{OCAO}(Xdx+Ydy+Zdz)+\int_{OABO}(Xdx+Ydy+Zdz).^{1})$$

[1]) Werden die Integrale in Glieder aufgelöst, so bekommt man für die rechte Seite der Gleichung

$$\int_{OBCO}+\int_{OCAO}+\int_{OABO}=\int_{OB}+\int_{BC}+\int_{CO}$$
$$+\int_{OC}+\int_{CA}+\int_{AO}$$
$$+\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO};$$

Zur Berechnung der Integrale auf der rechten Seite darf man nun den Ausdruck benutzen, welchen wir im vorigen Paragraphen abgeleitet haben; sowie die anderen die aus diesem ersten durch zyklische Vertauschung folgen.

Es wird hiernach

$$\int_{OBCO}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{OBCO}(Y\,dy + Z\,dz),$$
$$= \int\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\,dz,$$
$$= \int_{ABC}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(n,x)\,d\sigma,$$

$$\int_{OCAO} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{OCAO}(Z\,dz + X\,dx),$$
$$= \int\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dz\,dx,$$
$$= \int_{ABC}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(n,y)\,d\sigma,$$

$$\int_{OABO}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{OABO}(X\,dx + Y\,dy),$$
$$= \int\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy,$$
$$= \int_{ABC}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(n,z)\,d\sigma,$$

also:

$$(7)\quad \int_{ABCA}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{ABC}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right] d\sigma;$$

---

es ist aber

$$\int_{OA} = -\int_{AO},$$
$$\int_{OB} = -\int_{BO},$$
$$\int_{OC} = -\int_{CO},$$

also:

$$\int_{OBCO} + \int_{OCAO} + \int_{OABO} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA},$$
$$= \int_{ABCA}.$$

hier wurde mit n die äußere Normale zur Fläche ABC bezeichnet, mit $d\sigma$ aber das Element dieser Fläche.

Es ist nun einleuchtend, daß Gleichung (7) auf irgend eine beliebige Fläche anzuwenden ist, indem jede Fläche in lauter Dreiecke zerlegt werden kann.

Diese Gleichung spricht aber den Stokesschen Satz aus.

§ 9. Endlich haben wir noch den sogenannten Greenschen Satz abzuleiten. Man betrachte dazu eine Funktion φ, welche mit ihren Derivierten endlich und eindeutig in einem Raume τ, sowie auf dessen Begrenzungfläche σ bleibt.

Man kann offensichtlich schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

also:

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]d\tau$$
$$=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau+\int\varphi\,\Delta\varphi\;d\tau.$$

Die linke Seite formen wir jetzt nach dem Gaußschen Lehrsatz (diese Vorlesung § 5, Gl. 6) um. Es wird

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]d\tau$$
$$=\int\varphi\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(n,z)\right]d\sigma,$$
$$=\int\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{dz}{dn}\right)d\sigma,$$
$$=\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma;$$

und daher

$$(8)\quad\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau+\int\varphi\,\Delta\varphi\,d\tau,$$

was eben der Greensche Satz ist.

Zweiter Abschnitt
Mechanische Theorien.

Fünfte Vorlesung.

Cauchys Theorie der Dispersion des Lichtes.

§ 1. Zur Theorie von Cauchy. — § 2. Ableitung der Schwingungsgleichungen. — § 3. Fortpflanzung von ebenen Wellen. — § 4. Ursache der Lichtzerstreuung. — § 5. Dispersionsformel.

§ 1. Cauchys Theorie der Dispersion des Lichtes bietet ein interessantes Beispiel eines logischen Phänomens, welches auch in manchen anderen Gebieten der theoretischen Physik hervortritt. Cauchy hat den freien Äther und wägbare Stoffe als durchaus ähnliche Systeme von schwingenden Molekülen betrachtet, und damit die eigentliche Ursache der Lichtzerstreuung außer acht gelassen; nichtsdestoweniger zeigen seine Gleichungen, daß unter gewissen Hypothesen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu einer Funktion der Wellenlänge werden kann.

Schon deshalb wären die Cauchyschen Ausführungen der Beachtung wert; übrigens hat aber seine Betrachtungsweise als Muster für die Nachfolger gegolten, und manche seiner Bemerkungen, wie z. B. die Aussage, daß die Wirkungssphäre der Äther- resp. der materiellen Teilchen gegen die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes klein, aber nicht verschwindend klein seien, haben für die Entwicklung der Theorie bis in die neueste Zeit erfolgreich gewirkt.

Es empfiehlt sich also als Einführung in die Theorie der Spektralanalyse Cauchys Gedankenreihe ganz knapp zu behandeln.

§ 2. Dazu nehmen wir an, daß die schwingenden Teile aufeinander Wirkungen ausüben; es wird also irgend eine Störung des Gleichgewichtes eine bestimmte Arbeit erfordern und es besitzt daher das gestörte Medium ein Energiequantum potentieller Natur, das offenbar nur von den relativen Verschiebungen abhängen kann.

Bezeichnet man mit $\xi_\nu . \eta_\nu . \zeta_\nu$ die Verschiebungskomponenten für das ν-te Molekül, so hat man ganz einfach

$$U = \tfrac{1}{2}\sum_\nu \sum_\mu [a_{\nu,\mu}(\xi_\nu - \xi_\mu)^2 + b_{\nu,\mu}(\eta_\nu - \eta_\mu)^2 + c_{\nu,\mu}(\zeta_\nu - \zeta_\mu)^2 + 2\, d_{\nu,\mu}(\xi_\nu - \xi_\mu)(\eta_\nu - \eta_\mu) + 2\, e_{\nu,\mu}(\eta_\nu - \eta_\mu)(\zeta_\nu - \zeta_\mu) + 2 f_{\nu,\mu}(\zeta_\nu - \zeta_\mu)(\xi_\nu - \xi_\mu)]$$

zu setzen.

Bei isotropen Mitteln kann nun keine Richtung gegen die anderen bevorzugt sein, und folglich müssen wir

$$a_{\nu,\mu} = b_{\nu,\mu} = c_{\nu,\mu}$$
$$d_{\nu,\mu} = e_{\nu,\mu} = f_{\nu,\mu}$$

schreiben; also:

$$(1)\quad U = \tfrac{1}{2}\sum_\nu \sum_\mu a_{\nu,\mu}[(\xi_\nu - \xi_\mu)^2 + (\eta_\nu - \eta_\mu)^2 + (\zeta_\nu - \zeta_\mu)^2] + \sum_\nu \sum_\mu d_{\nu,\mu}[(\xi_\nu - \xi_\mu)(\eta_\nu - \eta_\mu) + (\eta_\nu - \eta_\mu)(\zeta_\nu - \zeta_\mu) + (\zeta_\nu - \zeta_\mu)(\xi_\nu - \xi_\mu)],$$

Was die kinetische Energie betrifft, so ist sie durch die übliche Formel

$$(2)\qquad T = \tfrac{1}{2}\sum_\nu m_\nu (\dot{\xi}_\nu^2 + \dot{\eta}_\nu^2 + \dot{\zeta}_\nu^2)$$

zu berechnen.

Die Lagrangeschen Gleichungen der Bewegung werden daher zu

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_\nu} + \dfrac{\partial U}{\partial \xi_\nu} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_\nu} + \dfrac{\partial U}{\partial \eta_\nu} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_\nu} + \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_\nu} = 0, \end{cases}$$

also nach (1) und (2)

$$(3)\begin{cases} m_\nu \ddot{\xi}_\nu + \sum_\mu a_{\nu,\mu}(\xi_\nu - \xi_\mu) + \sum_\mu d_{\nu,\mu}[(\eta_\nu - \eta_\mu) + (\zeta_\nu - \zeta_\mu)] = 0, \\ m_\nu \ddot{\eta}_\nu + \sum_\mu a_{\nu,\mu}(\eta_\nu - \eta_\mu) + \sum_\mu d_{\nu,\mu}[(\zeta_\nu - \zeta_\mu) + (\xi_\nu - \xi_\mu)] = 0, \\ m_\nu \ddot{\zeta}_\nu + \sum_\mu a_{\nu,\mu}(\zeta_\nu - \zeta_\mu) + \sum_\mu d_{\nu,\mu}[(\xi_\nu - \xi_\mu) + (\eta_\nu - \eta_\mu)] = 0. \end{cases}$$

§ 3. Um die Fortpflanzung von ebenen Wellen zu studieren setzen wir jetzt

$$(4)\qquad \begin{aligned} \xi_\nu &= a\cos\alpha\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t),\\ \eta_\nu &= a\cos\beta\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t),\\ \zeta_\nu &= a\cos\gamma\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t); \end{aligned}$$

dabei sind mit $\alpha.\beta.\gamma$ die Winkel bezeichnet, die die Verschiebung mit den Achsen bildet, mit y_ν aber der Abstand der Masse m_ν vom Nullpunkt des Koordinatensystems, der als ein sehr entfernter leuchtender Punkt zu denken ist.

Es wird aus (4)

$$\begin{aligned} \xi_\mu &= a\cos\alpha\sin(m y_\mu - \mathfrak{n} t) = a\cos\alpha\sin[m(y_\mu - y_\nu) + (m y_\nu - \mathfrak{n} t)]\\ &= a\cos\alpha\cos(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sin m(y_\mu - y_\nu)\\ &\quad + a\cos\alpha\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\cos m(y_\mu - y_\nu), \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \xi_\mu - \xi_\nu &= a\cos\alpha\cos(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sin m(y_\mu - y_\nu)\\ &\quad + a\cos\alpha\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1], \end{aligned}$$

und durch ähnliche Umformungen

$$\begin{aligned} \eta_\mu - \eta_\nu &= a\cos\beta\cos(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sin m(y_\mu - y_\nu)\\ &\quad + a\cos\beta\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_\mu - \zeta_\nu &= a\cos\gamma\cos(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sin m(y_\mu - y_\nu)\\ &\quad + a\cos\gamma\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1]. \end{aligned}$$

Bilden wir die Summen $\sum_\mu a_{\nu,\mu}\sin m(y_\mu - y_\nu)$ und $\sum_\mu d_{\nu,\mu}\sin m(y_\mu - y_\nu)$, so heben sich nun die Glieder paarweise auf, und wir bekommen

$$(3')\quad \begin{cases} m_\nu\ddot{\xi}_\nu - a\cos\alpha\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu a_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1]\\ \qquad - a\cos\beta\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu d_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1]\\ \qquad - a\cos\gamma\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu d_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1] = 0,\\ m_\nu\ddot{\eta}_\nu - a\cos\alpha\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu d_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1]\\ \qquad - a\cos\beta\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu a_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1]\\ \qquad - a\cos\gamma\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu d_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1] = 0,\\ m_\nu\ddot{\zeta}_\nu - a\cos\alpha\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu d_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1]\\ \qquad - a\cos\beta\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu d_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1]\\ \qquad - a\cos\gamma\sin(m y_\nu - \mathfrak{n} t)\sum_\mu a_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1] = 0. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt, der Einfachheit halber

$$\sum_\mu a_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1] + m_\nu \mathfrak{n}^2 = A_\nu\,,$$
$$\sum_\mu d_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1] \qquad\qquad = D_\nu\,,$$

und führen die Werte von $\ddot{\xi}_\nu . \ddot{\eta}_\nu . \ddot{\zeta}_\nu$ in die Gleichungen (3') ein, so bekommen wir die Bedingungen

$$(5)\qquad \begin{cases} A_\nu \cos\alpha + D_\nu \cos\beta + D_\nu \cos\gamma = 0\,, \\ D_\nu \cos\alpha + A_\nu \cos\beta + D_\nu \cos\gamma = 0\,, \\ D_\nu \cos\alpha + D_\nu \cos\beta + A_\nu \cos\gamma = 0\,. \end{cases}$$

Läßt man aber die Richtung der Verrückung etwa mit der x-Achse zusammenfallen, so wird

$$\cos\alpha = 1\,, \quad \cos\beta = \cos\gamma = 0$$

also, aus (5)

$$(5')\qquad A_\nu = D_\nu = 0.^1)$$

---

[1]) Man konnte übrigens a priori zeigen, daß jeder Koeffizient $d_{\nu,\mu}$ zu Null werden muß.

Dazu lassen wir das Koordinatensystem um die x-Achse herum eine Drehung ω ausführen, und nennen $\xi'_\nu . \eta'_\nu . \zeta'_\nu$ die neuen Verrückungskomponenten; es wird

$$\xi'_\nu = \xi_\nu \cos\omega + \eta_\nu \sin\omega\,,$$
$$\eta'_\nu = -\xi_\nu \sin\omega + \eta_\nu \cos\omega\,,$$
$$\zeta'_\nu = \zeta_\nu\,,$$

und damit

$$\begin{aligned}(\xi'_\nu - \xi'_\mu)^2 &= \xi_\nu^2 \cos^2\omega + \eta_\nu^2 \sin^2\omega + \xi_\mu^2 \cos^2\omega + \eta_\mu^2 \sin^2\omega \\ &\quad + 2(\xi_\nu \eta_\nu \sin\omega\cos\omega - \xi_\nu \xi_\mu \cos^2\omega - \xi_\nu \eta_\mu \sin\omega\cos\omega \\ &\quad - \xi_\mu \eta_\nu \sin\omega\cos\omega - \eta_\nu \eta_\mu \sin^2\omega + \xi_\mu \eta_\mu \sin\omega\cos\omega)\,,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(\eta'_\nu - \eta'_\mu)^2 &= \xi_\nu^2 \sin^2\omega + \eta_\nu^2 \cos^2\omega + \xi_\mu^2 \sin^2\omega + \eta_\mu^2 \cos^2\omega \\ &\quad + 2(-\xi_\nu \eta_\nu \sin\omega\cos\omega - \xi_\nu \xi_\mu \sin^2\omega + \xi_\nu \eta_\mu \sin\omega\cos\omega \\ &\quad + \xi_\mu \eta_\nu \sin\omega\cos\omega - \eta_\nu \eta_\mu \cos^2\omega - \xi_\mu \eta_\mu \sin\omega\cos\omega)\,,\end{aligned}$$
$$(\zeta'_\nu - \zeta'_\mu)^2 = (\zeta_\nu - \zeta_\mu)^2\,,$$

also:

$$(\xi'_\nu - \xi'_\mu)^2 + (\eta'_\nu - \eta'_\mu)^2 + (\zeta'_\nu - \zeta'_\mu)^2 = (\xi_\nu - \xi_\mu)^2 + (\eta_\nu - \eta_\mu)^2 + (\zeta_\nu - \zeta_\mu)^2\,,$$

wie übrigens zu erwarten war.

Andererseits wird aber

$$\begin{aligned}(\xi'_\nu - \xi'_\mu)(\eta'_\nu - \eta'_\mu) &= (\xi_\nu \cos\omega + \eta_\nu \sin\omega - \xi_\mu \cos\omega - \eta_\mu \sin\omega)(-\xi_\nu \sin\omega \\ &\qquad + \eta_\nu \cos\omega + \xi_\mu \sin\omega - \eta_\mu \cos\omega)\,, \\ &= [(\xi_\nu - \xi_\mu)\cos\omega + (\eta_\nu - \eta_\mu)\sin\omega][(\eta_\nu - \eta_\mu)\cos\omega \\ &\qquad - (\xi_\nu - \xi_\mu)\sin\omega]\,, \\ &= (\xi_\nu - \xi_\mu)(\eta_\nu - \eta_\mu)(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + [(\eta_\nu - \eta_\mu)^2 \\ &\qquad - (\xi_\nu - \xi_\mu)^2]\sin\omega\cos\omega\,,\end{aligned}$$

§ 4. Die Bedingung $A_\nu = 0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\sum_\mu a_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1] + m_\nu \mathfrak{n}^2 = 0$$

wollen wir jetzt näher betrachten.

Der Reihe nach erhalten wir

$$m_\nu \mathfrak{n}^2 = -\sum_\mu a_{\nu,\mu}[\cos m(y_\mu - y_\nu) - 1],$$

$$= \sum_\mu a_{\nu,\mu}\left[\frac{m^2(y_\mu - y_\nu)^2}{1.2} - \frac{m^4(y_\mu - y_\nu)^4}{1.2.3.4} + \frac{m^6(y_\mu - y_\nu)^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{m^8(y_\mu - y_\nu)^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \ldots\right].$$

Nennt man λ die Wellenlänge, c aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so wird $m = 2\pi/\lambda$, $\mathfrak{n} = 2\pi c/\lambda$,

$$m_\nu \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} = \sum_\mu a_{\nu,\mu}\left[\frac{(2\pi)^2(y_\mu - y_\nu)^2}{1.2.\lambda^2} - \frac{(2\pi)^4(y_\mu - y_\nu)^4}{1.2.3.4.\lambda^4} + \frac{(2\pi)^6(y_\mu - y_\nu)^6}{1.2.3.4.5.6.\lambda^6} - \frac{(2\pi)^8(y_\mu - y_\nu)^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.\lambda^8} + \ldots\right],$$

$$c^2 = \sum_\mu \frac{a_{\nu,\mu}}{m_\nu}\left[\frac{(y_\mu - y_\nu)^2}{1.2} - \frac{(2\pi)^2(y_\mu - y_\nu)^4}{1.2.3.4.\lambda^2} + \frac{(2\pi)^4(y_\mu - y_\nu)^6}{1.2.3.4.5.6.\lambda^4} - \frac{(2\pi)^6(y_\mu - y_\nu)^8}{1.2.3.4.5.5.7.8.\lambda^6} + \ldots\right];$$

oder, durch die Festsetzungen

---

woraus zu schließen ist, daß bloß für $\omega = 0$ der frühere Ausdruck zu erhalten wäre.

Es kann nun aber die Form der Energie, in einem isotropen Mittel gar nicht von den gewählten Achsen abhängen, was eben zur Bedingung $d_{\nu,\mu} = 0$ führt.

Es wäre also eigentlich die Funktion U in die Form

(1′) $$U = \tfrac{1}{2}\sum_\nu \sum_\mu a_{\nu,\mu}[(\xi_\nu - \xi_\mu)^2 + (\eta_\nu - \eta_\mu)^2 + (\zeta_\nu - \zeta_\mu)^2]$$

zu bringen.

Wie wir sehen werden, kommt immer wieder bei denselben Umständen ein ähnlicher Ausdruck für die Energie vor (VIII. Vorl. § 1).

Nach (1′) werden die Bewegungsgleichungen zu

(3″) $$\begin{cases} m_\nu \ddot{\xi}_\nu + \sum_\mu a_{\nu,\mu}(\xi_\nu - \xi_\mu) = 0, \\ m_\nu \ddot{\eta}_\nu + \sum_\mu a_{\nu,\mu}(\eta_\nu - \eta_\mu) = 0, \\ m_\nu \ddot{\zeta}_\nu + \sum_\mu a_{\nu,\mu}(\zeta_\nu - \zeta_\mu) = 0, \end{cases}$$

und liefern demgemäß die einzige Beziehung

(5″) $$A_\nu = 0.$$

$$\sum_\mu \frac{a_{\nu,\mu}}{m_\nu} \frac{(y_\mu - y_\nu)^2}{1.2} = a, \qquad -\sum_\mu \frac{a_{\nu,\mu}}{m_\nu} \frac{(2\pi)^2 (y_\mu - y_\nu)^4}{1.2.3.4} = b,$$

$$\sum_\mu \frac{a_{\nu,\mu}}{m_\nu} \frac{(2\pi)^4 (y_\mu - y_\nu)^6}{1.2.3.4.5.6} = c, \quad -\sum_\mu \frac{a_{\nu,\mu}}{m_\nu} \frac{(2\pi)^6 (y_\mu - y_\nu)^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} = d,$$

$$c^2 = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \frac{d}{\lambda^6} + \ldots. \tag{6}$$

Es ist nun zu bemerken, daß beim Bilden der Summen nur die Massenpunkte m_μ in Betracht kommen, welche in die Wirkungssphäre des schwingenden Teilchens m_ν fallen; bezeichnet man aber den Abstand zwischen m_μ und m_ν mit $r_{\mu,\nu}$ so wird

$$y_\mu = y_\nu + r_{\mu,\nu} \cos(y_\mu, r_{\mu,\nu})$$

d. h.

$$y_\mu - y_\nu = r_{\mu,\nu} \cos(y_\mu, r_{\mu,\nu}),$$

es ist also $y_\mu - y_\nu$ von derselben Größenordnung wie $r_{\mu,\nu}$, also eine sehr kleine Größe. Nehmen wir sie als gegen die Wellenlänge verschwindend klein an, so erhält man

$$c^2 = a; \tag{6'}$$

bei größerer Annäherung kommen dann die übrigen Glieder hinzu. Es tritt also Dispersion des Lichtes ein, wenn die Wirkungssphäre der schwingenden Moleküle gegen die Wellenlänge nicht allzu klein ist.

§ 5. Um den Ausdruck, welchen wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus Cauchys Theorie abgeleitet haben, experimentell prüfen zu können, ist es nötig, aus demselben eine Formel zu berechnen, die den Brechungsexponenten irgend eines isotropen Mittels, bezogen auf den leeren Raum, als Funktion der Wellenlänge des leeren Raumes darstellt.

Dazu haben wir aber zu bemerken, daß aus astronomischen Beobachtungen sich ergeben hat, daß im freien Äther die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschiedener Farben sich nicht einmal um $^1/_{100\,000}$ des eigenen Betrags voneinander unterscheiden. Wir nehmen daher an, daß im leeren Raume keine Dispersion stattfindet.

Es sei nun für einen Strahl von bestimmter Schwingungsperiode C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im freien Äther, Λ die Wellenlänge ebenfalls im leeren Raum, c und λ Geschwindigkeit und Wellenlänge für einen ponderablen Stoff,

N endlich der Brechungsexponent des Mittels bezogen auf den leeren Raum. Man hat als Definition

$$N = \frac{C}{c} = \frac{\Lambda}{\lambda}$$

zu setzen.

Aus (6) wird also:

$$c^2 = a + \frac{b N^2}{\Lambda^2} + \frac{c N^4}{\Lambda^4} + \frac{d N^6}{\Lambda^6} + \ldots,$$

d. h.

$$(6'') \qquad \frac{c^2}{C^2} = \frac{1}{N^2} = \frac{1}{C^2}\left(a + \frac{b N^2}{\Lambda^2} + \frac{c N^4}{\Lambda^4} + \frac{d N^6}{\Lambda^6} + \ldots\right),$$

wo, wie gesagt, C als eine Konstante (eine von der Periode unabhängige Größe) zu betrachten ist.

Man erhält daher in erster Annäherung

$$\frac{1}{N^2} = \frac{a}{C^2},$$

und beim Einführen dieses Wertes in (6'')

$$\frac{1}{N^2} = \frac{a}{C^2} + \frac{b}{a\Lambda^2} + \frac{c C^2}{a^2 \Lambda^4} + \frac{d C^4}{a^3 \Lambda^6} + \ldots,$$

$$= A' + \frac{B'}{\Lambda^2} + \frac{C'}{\Lambda^4} + \frac{D'}{\Lambda^6} + \ldots,$$

also:

$$N = \left(A' + \frac{B'}{\Lambda^2} + \frac{C'}{\Lambda^4} + \frac{D'}{\Lambda^6} + \ldots\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A'}}\left(1 + \frac{B'}{A'\Lambda^2} + \frac{C'}{A'\Lambda^4} + \frac{D'}{A'\Lambda^6} + \ldots\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A'}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{B'}{A'\Lambda^2} - \frac{1}{2}\frac{C'}{A'\Lambda^4} - \frac{1}{2}\frac{D'}{A'\Lambda^6} - \ldots\right),$$

$$= A + \frac{B}{\Lambda^2} + \frac{C}{\Lambda^4} + \frac{D}{\Lambda^6} + \ldots,$$

dieses ist aber Cauchys bekannte Formel für den Brechungskoeffizienten ponderabler Körper (I. Vorl. § 1).

Sechste Vorlesung.

v. Helmholtz' Theorie der anomalen Lichtzerstreuung.

§ 1. Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie. — § 2. Ableitung der Schwingungsgleichungen. — § 3. Fortpflanzung von ebenen Wellen im freien Äther. — § 4. Fortpflanzung in der ponderablen Materie. — § 5—6. Gang der Absorptionskurve. — § 7. Erklärung der anomalen Dispersion.

§ 1. v. Helmholtz' Theorie der Dispersion des Lichtes hat der Cauchyschen Theorie gegenüber einen entschiedenen Vorteil, indem sie die Ursache der Erscheinung in einem Mitschwingen des Äthers und der ponderablen Materie sucht. Wie es nachher sich zeigen wird (X. Vorl.) kann man ja die v. Helmholtzsche Theorie fast wörtlich in die elektromagnetische Sprache übersetzen; selektive Absorption und Dispersion erscheinen dann als Resonanzphänomene, eine Anschauung, welche bekanntlich (II. Vorl.) mit experimentell festgestellten Tatsachen vortrefflich übereinstimmt. Wir denken uns etwa auf der y-Achse (Fig. 26) eine Reihe von Ätherteilchen, $\ldots P_{\nu-2}.P_{\nu-1}.P_{\nu}.P_{\nu+1}.P_{\nu+2}\ldots$, und dabei ein im Äther eingelagertes ponderables Atom A.

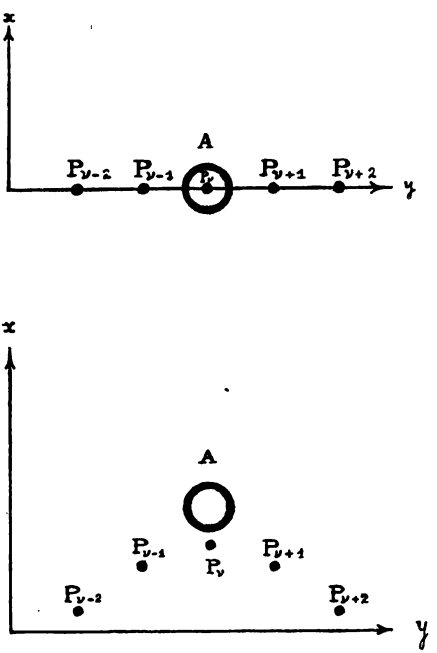


Fig. 26.

Eine Störung, welche sich der y-Achse entlang fortpflanzt, setze nun das ganze System in Bewegung. Es werden sowohl die P, wie auch das materielle Teilchen A aus ihren Gleichgewichtslagen gebracht; der Allgemeinheit wegen müssen wir annehmen, es seien die Abstände zwischen A und dem nahe-

liegenden Ätherteilchen verändert; die Verschiebungen finden, indem die Störung eine reine transversale ist, etwa nach der x-Achse (y senkrecht) statt.

Man bezeichne mit $\ldots y_{\nu-2} \cdot y_{\nu-1} \cdot y_\nu \cdot y_{\nu+1} \cdot y_{\nu+2} \ldots$ die Koordinaten der Ätherteilchen; der Figur gemäß wird y_ν gleichfalls die Koordinate des ponderablen Atoms bedeuten; es seien übrigens $\ldots \xi_{\nu-2} \cdot \xi_{\nu-1} \cdot \xi_\nu \cdot \xi_{\nu+1} \cdot \xi_{\nu+2} \ldots$ und x_ν die eingetretenen Verrückungen.

Was die kinetische Energie des Systems betrifft, so wird ganz einfach

$$T = \frac{1}{2} \sum m_\nu \dot{x}_\nu^2 + \frac{1}{2} \sum \mu_\nu \dot{\xi}_\nu^2,$$

worin, wie leicht zu ersehen, mit μ_ν und m_ν Massen gemeint sind.

Etwas schwieriger gestaltet sich aber die Berechnung der potentiellen Energie; dazu stellen wir folgende Überlegung an.

Befinden sich die Ätherteilchen in den gestörten Lagen, so werden sie von elastischen Kräften zurückgetrieben. Am besten machen wir uns ein Bild hiervon, indem wir diese Teilchenreihe mit den Teilchen einer gespannten Saite vergleichen.

Ist also τ^2 die Spannung, so wird auf P_ν eine Wirkung

$$(*) \qquad \left(\frac{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}}{c} - \frac{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu}{c} \right) \tau^2$$

ausgeübt, und zur weiteren Verschiebung $d\xi_\nu$ ist eine Arbeit

$$\left(\frac{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}}{c} - \frac{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu}{c} \right) \tau^2 d\xi_\nu$$

erforderlich. Dabei ist

$$\ldots . y_{\nu+1} - y_\nu = y_\nu - y_{\nu-1} = \ldots . = c$$

gesetzt worden.

Ganz ähnliche Ausdrücke würde man für die übrigen Ätherteilchen erhalten; also z. B. für $P_{\nu-1}$

$$\left(\frac{\xi_{\nu-1} - \xi_{\nu-2}}{c} - \frac{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}}{c} \right) \tau^2 d\xi_{\nu-1},$$

für $P_{\nu+1}$

$$\left(\frac{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu}{c} - \frac{\xi_{\nu+2} - \xi_{\nu+1}}{c} \right) \tau^2 d\xi_{\nu+1},$$

usw.

Bilden wir daher die Summe aus den Arbeiten, welche in der ganzen Teilchenreihe geleistet werden, so erhalten wir

$$\ldots + \tau^2 \frac{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}}{c} (d\xi_\nu - d\xi_{\nu-1}) + \tau^2 \frac{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu}{c} (d\xi_{\nu+1} - d\xi_\nu) + \ldots,$$

also, beim Integrieren[1])

$$U_1 = \frac{\tau^2}{2c}\sum(\xi_\nu - \xi_{\nu-1})^2 .$$

Das materielle Atom übt wieder auf die Ätherteilchen eine Wirkung aus, die man passend als der relativen Verschiebung proportional ansehen kann; und damit kommt der potentiellen Energie ein neues Glied hinzu, d. h.

$$U_2 = \frac{\beta^2}{2}\sum(x_\nu - \xi_\nu)^2 .$$

Endlich wird das ponderable Theilchen von einer elastischen, etwa von benachbarten Teilchen herrührenden, Kraft zurückgetrieben. Diese Kraft muß nun der Verschiebung einfach proportional sein, und damit erhält U ein drittes Glied, also:

$$U_3 = \frac{\alpha^2}{2}\sum x_\nu^2 ,$$

und

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{\tau^2}{2c}\sum(\xi_\nu - \xi_{\nu-1})^2 + \frac{\beta^2}{2}\sum(x_\nu - \xi_\nu)^2 + \frac{\alpha^2}{2}\sum x_\nu^2 .$$

Der experimentellen Tatsache der Absorption des Lichtes in materiellen Körpern gemäß, haben wir jetzt eine Dissipationsfunktion zu bilden; offenbar muß aber diese Funktion nur von den Geschwindigkeiten der ponderablen Teilchen abhängen. Wir setzen daher

$$V = \frac{\gamma^2}{2}\sum \dot{x}_\nu^2 .$$

§ 2. Damit werden die Lagrangeschen Gleichungen der Bewegung zu

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_\nu} + \dfrac{\partial U}{\partial \xi_\nu} + \dfrac{\partial V}{\partial \dot{\xi}_\nu} = 0 , \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu} + \dfrac{\partial U}{\partial x_\nu} + \dfrac{\partial V}{\partial \dot{x}_\nu} = 0 \end{cases}$$

d. h.

$$\begin{cases} \mu_\nu \ddot{\xi}_\nu + \dfrac{\tau^2}{c}[(\xi_\nu - \xi_{\nu-1}) - (\xi_{\nu+1} - \xi_\nu)] - \beta^2(x_\nu - \xi_\nu) = 0 , \\ m_\nu \ddot{x}_\nu + \beta^2(x_\nu - \xi_\nu) + \alpha^2 x_\nu + \gamma^2 \dot{x}_\nu = 0 . \end{cases}$$

[1]) Die auf die Koordinate ξ_ν wirkende Kraft ist in (*) angegeben, es wäre also die Untersuchung der Funktion U_1, für den Augenblick, entbehrlich; den abgeleiteten Ausdruck werden wir aber in der nächsten Vorlesung benutzen (VII. Vorl. § 16). Man vergleiche darüber noch die Gleichung (1') der letzten Vorlesung.

Jetzt wollen wir die Ätherteilchen P_ν nebeneinanderrücken lassen, so daß die Reihe eine kontinuierliche werde; man muß daher

$$\frac{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}}{c} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{P \equiv P_{\nu-1}},$$

$$\frac{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu}{c} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{P \equiv P_\nu}$$

setzen, also:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}}{c} - \frac{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu}{c}\right) = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{P \equiv P_{\nu-1}} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{P \equiv P_\nu}\right],$$

$$= -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}.$$

Läßt man, der Einfachheit halber, die Indizes beiseite, so wird

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu \ddot{\xi} - a^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \beta^2 (x - \xi) = 0, \\ m \ddot{x} + \beta^2 (x - \xi) + \alpha^2 x + \gamma^2 \dot{x} = 0, \end{cases}$$

wo für $\tau^2 c$ jetzt a^2 geschrieben worden ist.

§ 3. Im freien Äther wird natürlich

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

und damit

$$(1') \qquad \mu \ddot{\xi} - a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0.$$

Als Integral dürfen wir also, nach den aufgestellten Hypothesen,

$$(2') \qquad \xi = \mathfrak{A}\, e^{ly - int}$$

schreiben; soll nun die Bewegung rein periodische Schwingungen darstellen, so muß n reell sein. Dann wird l der Regel nach eine komplexe Größe.

Wir setzen daher

$$l = -k + \frac{in}{c},$$

also:

$$\frac{l}{n} = -\frac{k}{n} + \frac{i}{c},$$

wo k und c als lauter reelle Größen zu betrachten sind.

Führt man die neue Definition von l in Gleichung (2') ein, so ergibt sich leicht

$$\xi = \mathfrak{A}\, e^{ly - int},$$
$$= \mathfrak{A}\, e^{-ky + in\left(\frac{y}{c} - t\right)},$$
$$= \mathfrak{A}\, e^{-ky}\left[\cos n\left(\frac{y}{c} - t\right) + i \sin n\left(\frac{y}{c} - t\right)\right].$$

Unter k ist also der Absorptionskoeffizient, unter c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu verstehen.

Aus Gleichung (1') durch Substitution des Wertes von ξ leitet man aber

$$-\mu n^2 - a^2 l^2 = 0$$

ab, also:

$$-\mu n^2 - a^2\left(-k + \frac{in}{c}\right)^2 = 0,$$
$$-\mu n^2 - a^2\left(k^2 - \frac{n^2}{c^2} - \frac{2kn}{c} i\right) = 0,$$
$$\begin{cases} -\mu n^2 - a^2 k^2 + \dfrac{a^2 n^2}{c^2} = 0, \\ \dfrac{2a^2 kn}{c} = 0, \end{cases}$$

und daher

$$k = 0, \qquad c = \frac{a}{\sqrt{\mu}}.$$

Es gibt hiernach im freien Äther keine Absorption, und eine von der Frequenz unabhängige Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

§ 4. Zur Betrachtung des allgemeinen Falles übergehend stellen wir nun folgende Integrale dar

$$\xi = \mathfrak{A}\, e^{ly - int}, \qquad (2)$$
$$x = A\, e^{ly - int}.$$

Beim Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (1) wird aber

$$(-\mu n^2 - a^2 l^2 + \beta^2)\mathfrak{A} = \beta^2 A,$$
$$(-m n^2 + \alpha^2 + \beta^2 - i n \gamma^2) A = \beta^2 \mathfrak{A},$$

und, nach Elimination der A und $\mathfrak{A}$

$$\begin{vmatrix} -\mu n^2 - a^2 l^2 + \beta^2 & \beta^2 \\ \beta^2 & -m n^2 + \alpha^2 + \beta^2 - i n \gamma^2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} -\mu n^2 - a^2 l^2 & -\beta^2 - (m n^2 - \alpha^2 - \beta^2 + i n \gamma^2) \\ \beta^2 & m n^2 - \alpha^2 - \beta^2 + i n \gamma^2 \end{vmatrix} = 0,$$

also:

$$-\mu n^2 - a^2 l^2 = -\beta^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{m n^2 - \alpha^2 - \beta^2 + i n \gamma^2}\right),$$

und endlich

$$(3) \qquad -\frac{l^2}{n^2} = \frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 n^2}\left(1 + \frac{\beta^2}{m n^2 - \alpha^2 - \beta^2 + i n \gamma^2}\right).$$

Dieser Bedingung haben die Konstanten l und n zu genügen, damit die Gleichungen (2) als Integrale der Gleichungen (1) zulässig sind.

Wir setzen jetzt den Wert von l in (3) ein, und trennen das Reelle vom Imaginären; es wird dann der Reihe nach

$$-\left(-\frac{k}{n} + \frac{i}{c}\right)^2 = -\frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2k}{cn} i = \frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 n^2}\left(1 + \frac{\beta^2}{m n^2 - \alpha^2 - \beta^2 + i n \gamma^2}\right),$$

$$= \frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 n^2}\left[1 + \frac{\beta^2 (m n^2 - \alpha^2 - \beta^2 - i n \gamma^2}{(m n^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + n^2 \gamma^4}\right],$$

$$= \frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 n^2} - \frac{\beta^4}{a^2 n^2} \frac{m n^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(m n^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + n^2 \gamma^4} + \frac{\beta^4 \gamma^2}{a^2 n} \frac{i}{(m n^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + n^2 \gamma^4},$$

und endlich

$$(3') \qquad \begin{cases} -\dfrac{k^2}{n^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{\mu}{a^2} - \dfrac{\beta^2}{a^2 n^2} - \dfrac{\beta^4}{a^2 n^2} \dfrac{m n^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(m n^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + n^2 \gamma^4}, \\ \dfrac{2k}{cn} = \dfrac{\beta^4 \gamma^2}{a^2 n} \dfrac{1}{(m n^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + n^2 \gamma^4}. \end{cases}$$

Nach diesen Gleichungen darf man also schließen, daß bei Anwesenheit der ponderablen Atome sowohl Absorption als Farbenzerstreuung eintreten wird. Dabei ist die Absorption eine selektive, denn es hängt die Konstante k von der Schwingungszahl[1]) im allgemeinen ab.

§ 5. Aus der zweiten unter den Gleichungen (3') erhält man

$$\frac{k}{c} = \frac{\beta^4 \gamma^2}{2 a^2} \frac{1}{(m n^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + n^2 \gamma^4},$$

$$= \frac{\beta^4 \gamma^2}{2 a^2 m^2} \frac{1}{\left(n^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{m}\right)^2 + n^2 \frac{\gamma^4}{m^2}}.$$

[1]) n ist ja die mit 2π multiplizierte Schwingungszahl.

Wir stellen jetzt die Bedingung

$$\left(\mathfrak{n}^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2-\delta}{m}\right)^2 + \varepsilon = \left(\mathfrak{n}^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{m}\right)^2 + \mathfrak{n}^2\frac{\gamma^4}{m^2},$$

und versuchen, ob man derart δ und ε bestimmen kann, daß ε eine von der Schwingungszahl ($\mathfrak{n}$) unabhängige Größe werde.

Beim Entwickeln wird

$$\left(\mathfrak{n}^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2-\delta}{m}\right)^2 + \varepsilon = \left[\left(\mathfrak{n}^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{m}\right) + \frac{\delta}{m}\right]^2 + \varepsilon,$$

$$= \left(\mathfrak{n}^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{m}\right)^2 + 2\frac{\delta}{m}\left(\mathfrak{n}^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{m}\right) + \frac{\delta^2}{m^2} + \varepsilon,$$

also:

$$2\frac{\delta}{m}\left(\mathfrak{n}^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{m}\right) + \frac{\delta^2}{m^2} + \varepsilon = \mathfrak{n}^2\frac{\gamma^4}{m^2};$$

der Bedingung wird daher genügt indem man

$$2\frac{\delta}{m}\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}^2\frac{\gamma^4}{m^2},$$

$$-2\frac{\delta}{m}\frac{\alpha^2+\beta^2}{m} + \frac{\delta^2}{m^2} + \varepsilon = 0$$

setzt. Hieraus leiten wir

$$\delta = \frac{\gamma^4}{2m}, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma^4}{m^2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\frac{\gamma^4}{2m}}{m} + \frac{\gamma^4}{4m^2}\right)$$

ab; und folglich

$$\frac{}{c} = \frac{\beta^4\gamma^2}{2\alpha^2 m^2}\,\frac{1}{\left(\mathfrak{n}^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2-\frac{\gamma^4}{2m}}{m}\right)^2 + 4\frac{\gamma^4}{4m^2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\frac{\gamma^4}{2m}}{m} + \frac{\gamma^4}{4m^2}\right)},$$

$$= \frac{\beta^4\gamma^2}{2\alpha^2 m^2}\,\frac{1}{(\mathfrak{n}^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)},$$

wo der Einfachheit halber

$$\nu^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2-\frac{\gamma^4}{2m}}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{\gamma^4}{4m^2}$$

gesetzt worden ist.

Es ist nun

$$\frac{\partial\left(\frac{k}{c}\right)}{\partial\,\mathfrak{n}} = \frac{\beta^4\gamma^2}{2\alpha^2 m^2}\,\frac{-4\,\mathfrak{n}\,(\mathfrak{n}^2-\nu^2)}{[(\mathfrak{n}^2-\nu^2)^2 + 4\,\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^2},$$

für die Gleichung

$$\frac{\partial\left(\frac{k}{c}\right)}{\partial n} = 0$$

erhält man daher drei verschiedene Wurzeln, indem man entweder $n = 0$, oder $n = \infty$ oder endlich $n = \nu$ setzt. Wie leicht zu ersehen, entsprechen aber die erste und die zweite Lösung einem Minimum, die dritte dagegen einem Maximum der Funktion.

§ 6. Bezeichnen wir den Maximalwert von k mit k_0 und den entsprechenden von c mit c_0 so wird

$$\frac{k_0}{c_0} = \frac{\beta^4\gamma^2}{2\alpha^2 m^2} \cdot \frac{1}{4\omega^2(\nu^2+\omega^2)}$$

und

$$\frac{c_0}{k_0} = \frac{2\alpha^2 m^2}{\beta^4\gamma^2} \cdot 4\omega^2(\nu^2+\omega^2);$$

es ist aber

$$\frac{c}{k} = \frac{2\alpha^2 m^2}{\beta^4\gamma^2}\left[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)\right],$$

und daher

$$= \frac{c_0}{k_0}\left[1 + \frac{(n^2-\nu^2)^2}{4\omega^2(\nu^2+\omega^2)}\right].$$

Die letzte Gleichung zeigt nun, daß, wenn n und ν konstant gehalten werden, die Größe k/c um so größer im Verhältnis zum Maximum der Absorption k_0/c_0 ist, je größer $\omega^2 = \gamma^4/4m^2$. Kleine Werte des Reibungskoeffizienten γ geben also schmale Absorptionsstreifen.

§ 7. Bei mäßiger Absorption darf man nach (3')

$$(3'') \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} - \frac{\beta^4}{\alpha^2 n^2} \cdot \frac{m n^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(m n^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + n^2\gamma^4}$$

schreiben. Bezeichnen wir nun mit C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im freien Raume, so ist das Brechungsverhältnis N unseres Mediums

$$N^2 = \frac{C^2}{c^2};$$

für $n^2 = (\alpha^2+\beta^2)/m$, welches nahezu der Wert für den Streifen der stärksten Absorption ist, wollen wir es mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen.

Aus (3″) wird nun

$$N^2 = C^2\left(\frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 n^2}\right) - \frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{n^2 - \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{m}}{\left(n^2 - \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{m}\right)^2 + n^2\dfrac{\gamma^4}{m^2}},$$

$$= C^2\left(\frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 n^2}\right)$$

$$- \frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{n^2 - \dfrac{\alpha^2+\beta^2-\dfrac{\gamma^4}{2m}}{m} - 2\dfrac{\gamma^4}{4m^2}}{\left(n^2 - \dfrac{\alpha^2+\beta_2-\dfrac{\gamma^4}{2m}}{m}\right)^2 + 4\dfrac{\gamma^4}{4m^2}\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\dfrac{\gamma^4}{2m}}{m} + \dfrac{\gamma^4}{4m^2}\right)},$$

$$= C^2\left(\frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 n^2}\right) - \frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{n^2 - \nu^2 - 2\omega^2}{(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)}$$

und

$$\mathfrak{N}^2 = C^2\left(\frac{\mu}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2 n^2}\right),$$

also:

$$N^2 - \mathfrak{N}^2 = -\frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{n^2 - \nu^2 - 2\omega^2}{(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)}.$$

Bei schmalem Absorptionsstreifen können wir die Änderung des Faktors $1/n^2$ vor der Parenthese vernachlässigen; dann ist aber, wie sich oben zeigte, ω^2 eine kleine Größe.

Man erhält daher, annäherungsweise,

$$\frac{\partial(N^2-\mathfrak{N}^2)}{\partial n} = -\frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{n^2 - \nu^2 - 2\omega^2}{(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)},$$

und, der Reihe nach

$$\frac{\partial(N^2-\mathfrak{N}^2)}{\partial n} = -\frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{2n[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)] - 4n(n^2-\nu^2-2\omega^2)(n^2-\nu^2)}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^2},$$

$$= -\frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{-2n(n^2-\nu^2)^2 + 8n\omega^2(\nu^2+\omega^2) + 8n\omega^2(n^2-\nu^2)}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^2},$$

$$= -\frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{-2n(n^2-\nu^2)^2 + 8n\omega^2\nu^2 + 8n\omega^2(n^2-\nu^2)}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^2},$$

$$= -\frac{C^2\beta^4}{a^2 n^2 m}\,\frac{-2n(n^2-\nu^2)^2 + 8\omega^2 n^2}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^2},$$

$$(4) \qquad = -\frac{2C^2\beta^4}{a^2 n m}\,\frac{-(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2 n^2}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^2};$$

für die Gleichung

$$\frac{\partial(N^2-\mathfrak{N}^2)}{\partial n} = 0$$

erhält man also drei Wurzeln, d. h., mit $n = \infty$, die Wurzeln der Gleichung

$$(n^2 - \nu^2)^2 - 4\omega^2 n^2 = 0,$$

was, angenähert

$$n^2 - \nu^2 = \pm 2\omega\nu \tag{5}$$

liefert.

Die Wurzel $n = \infty$ ist aber nicht zu berücksichtigen, da die ganze Rechnung unter der Hypothese durchgeführt wurde daß n im Absorptionsgebiet sehr wenig variiere.

Es bleibt zu entscheiden, ob die in (5) angegebenen Wurzeln einem Minimum oder vielmehr einem Maximum der Funktion entsprechen.

Dazu bilden wir die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2(N^2 - \mathfrak{N}^2)}{\partial n^2} = -\frac{2C^2\beta^4}{a^2 n m}\frac{\partial}{\partial n}\frac{-(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2 n^2}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^2},$$

$$= -\frac{2C^2\beta^4}{a^2 n m}\left\{\frac{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^2[-4n(n^2-\nu^2) + 8\omega^2 n]}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^4}\right.$$

$$\left. - 8\frac{[-(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2 n^2][(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]\, n(n^2-\nu^2)}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^4}\right\},$$

$$= -\frac{2C^2\beta^4}{a^2 n m}\left\{\frac{-4n[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2]^2(n^2-\nu^2)}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^4}\right.$$

$$\left. - 8n\frac{[-(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2][(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2](n^2-\nu^2)}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^4}\right\},$$

$$= +\frac{8C^2\beta^4}{a^2 m}\left\{\frac{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2]^2(n^2-\nu^2)}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^4}\right.$$

$$\left. + 2\frac{[-(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2][(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2](n^2-\nu^2)}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2(\nu^2+\omega^2)]^4}\right\},$$

$$= +\frac{8C^2\beta^4(n^2-\nu^2)}{a^2 m}\cdot\frac{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2] + 2[-(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2]}{[(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2]^3},$$

für $n^2 - \nu^2 = \pm 2\omega\nu$ ist aber

$$(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2 = 8\omega^2\nu^2,$$

$$-(n^2-\nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2 = 0,$$

also:

$$\frac{\partial^2(N^2 - \mathfrak{N}^2)}{\partial n^2} = \pm 2\frac{8C^2\beta^4\omega\nu}{a^2 m}\frac{1}{(8\omega^2\nu^2)^2},$$

$$= \pm\frac{1}{4}\frac{C^2\beta^4}{a^2 m\omega^2\nu^3}. \tag{6}$$

Das obere Zeichen in (5) und (6) entspricht also einem Minimum und das untere Zeichen einem Maximum der Funk-

tion $N^2 - \mathfrak{N}^2$. Es ist noch zu bemerken, daß nach (4) für $n = \nu$ wird

$$\frac{\partial (N^2 - \mathfrak{N}^2)}{\partial n} = - \frac{2 C^2 \beta^4}{a^2 \nu m} \frac{4 \omega^2 \nu^2}{[4 \omega^2 (\nu^2 + \omega^2)]^2},$$

$$= - \frac{C^2 \beta^4}{2 a^2 m \omega^2 \nu^3};$$

die Funktion $N^2 - \mathfrak{N}^2$ ist also im Absorptionsstreifen eine abnehmende.

Wir werden also beobachten müssen:

a) für eine Frequenz welche ein wenig größer ist als die Frequenz, die dem Absorptionsstreifen entspricht, ein Minimum des Brechungskoeffizienten;

b) für eine kleinere Frequenz dagegen ein Maximum.

Die Kurve der Brechung verändert sich dabei kontinuierlich, auch zwischen Maximum und Minimum, indem sie durch den Absorptionsstreifen hindurch, von jenem zu diesem absteigend verläuft.

Es stimmen aber diese Resultate mit den Erfahrungstatsachen in bewunderungswürdiger Weise überein (I. Vorl. § 2).

Siebente Vorlesung.

Mechanische Bilder für die Moleküle zusammengesetzter Körper.

§ 1—3. Einleitendes. — § 4—7. Mechanisches Bild für ein zweiatomiges Molekül. — § 8—9. Kontrollversuche. — § 10—14. Mechanisches Bild eines dreiatomigen Moleküls. — § 15. Verallgemeinerung des Modells. — § 16. Eine andere Art der Koppelung.

§ 1. Eine allgemeine Theorie der Lichtemission wurde zuerst auf elektromagnetische Grundlagen gebaut. Und dies ist auch leicht zu verstehen.

Nach den Untersuchungen von Bunsen und Lockyer (I. Vorl. § 8) wird das Spektrum eines Elementes nicht vernichtet, wenn das Atom in ein zusammengesetztes Molekül hineintritt; es werden dabei zwar sehr oft die Linien verschoben, behalten aber ihren Charakter und ihre frühere Verteilung.

Denken wir uns das Atom als ein System von Leitern, resp. von elektrisierten Teilchen, so sind jene Tatsachen auf Fernwirkungen zurückzuführen (XIII., XIV. und XX. Vorl.); bei rein mechanischen Bildern dagegen ist die Bewegungsübertragung nicht so einfach zu begreifen.

Erst in neuester Zeit hat nun Herr A. Filippini auf Anregung des Verfassers, durch Bearbeitung eines klassischen Problems nachgewiesen, daß bei der Koppelung schwingender Systeme Periodenänderungen hervorgerufen werden, welche mit den Linienverschiebungen der Lichtspektren eine große Ähnlichkeit zeigen.

Die Systeme, die Herr Filippini betrachtete, sind aus einfachen Pendeln zusammengesetzt; wir beginnen daher die Erörterung seiner Untersuchungen am besten damit, daß wir uns zunächst die wohlbekannte Theorie der Pendelschwingungen ins Gedächtnis zurückrufen.

§ 2. Wir betrachten also ein einfaches Pendel, und nennen l seine Länge, m seine Masse, θ die (sehr kleine) Winkelverschiebung, g endlich die Gravitationsbeschleunigung.

Dann ist

$$T = \frac{m l^2 \dot{\theta}^2}{2},$$

$$U = \frac{m g l \theta^2}{2},$$

und, bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes

$$V = 0$$

zu setzen.

Die Lagrangesche Gleichung nimmt daher die Form

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

an, oder, was dasselbe ist

$$\left(D^2 + \frac{g}{l}\right)\theta = 0.$$

Hieraus leitet man die Charakteristik

$$D^2 + \frac{g}{l} = 0,$$

d. h.

$$D = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}},$$

und die Periode

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ab.

Um Bezeichnungen der Optik zu gebrauchen, können wir also sagen, daß das Pendel ein Spektrum mit einer einzigen Linie emittiert.

§ 3. Im vorigen Paragraphen war der Aufhängepunkt des Pendels stillschweigend als fest vorausgesetzt. Jenen Punkt wollen wir jetzt auf einer geradlinigen Strecke horizontal schwingen lassen. Weiter nehmen wir an, daß die genannte Strecke in der Ebene, in der das Pendel sich bewegt, liege.

Es wird also, mit leicht zu begreifenden Bezeichnungen

$$T = \frac{m}{2}\left(l\dot{\theta} + \frac{2\pi C}{\mathfrak{T}}\cos\frac{2\pi t}{\mathfrak{T}}\right)^2,$$

und, wie vorher

$$U = \frac{m g l \theta^2}{2}.$$

Auf diese Weise bekommen wir die Bewegungsgleichung

$$l\ddot{\theta} - \frac{4\pi^2 C}{\mathfrak{T}^2}\sin\frac{2\pi t}{\mathfrak{T}} + g\theta = 0,$$

d. h.

$$(l D^2 + g)\theta = \frac{4\pi^2 C}{\mathfrak{T}^2}\sin\frac{2\pi t}{\mathfrak{T}},$$

und

$$\theta = \frac{4\pi^2 C}{\mathfrak{T}^2(l D^2 + g)}\sin\frac{2\pi t}{\mathfrak{T}},$$

$$= \frac{4\pi^2 C}{g\mathfrak{T}^2 - 4\pi^2 l}\sin\frac{2\pi t}{\mathfrak{T}}.$$

Diesem Werte darf man natürlich eine Lösung der Gleichung

$$\left(D^2 + \frac{g}{l}\right)\theta = 0$$

hinzufügen; es emittiert also das Pendel mit schwingendem Aufhängepunkt ein Spektrum von zwei Linien. Eine von diesen stimmt jedoch der Stellung nach mit der Linie überein, die das schwingende System des vorigen Paragraphen ausstrahlte.

§ 4. Der Prozeß wird noch verwickelter, wenn wir zwei Pendel zusammenschwingen lassen, und zwar so, daß das untere Pendel an die Kugel des oberen angehängt ist, wie aus der Fig. 27 ersichtlich.

Man bezeichne mit l_1 die Länge und mit m_1 die Masse des oberen, mit l_2 die Länge und mit m_2 die Masse des unteren Pendels.

Es seien ferner M_1 (Fig. 28) und M_2 die Stellungen von

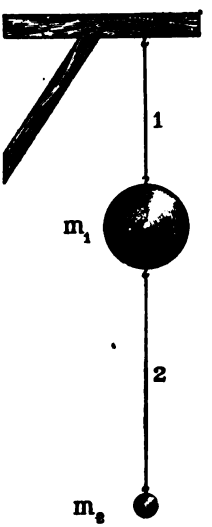


Fig. 27.

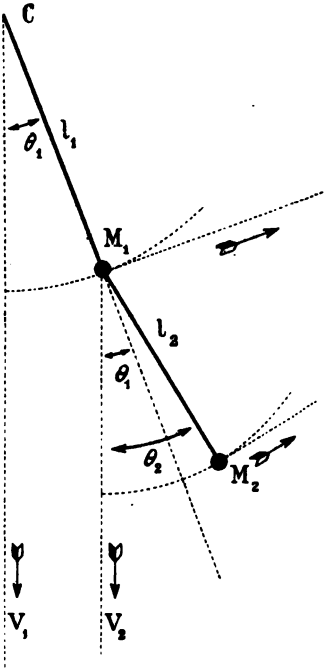


Fig. 28.

m_1 bzw. m_2 zur Zeit t, C der Aufhängepunkt des oberen Pendels, $C V_1$ und $M_1 V_2$ die Lotrichtungen durch C und M_1.

Wir setzen

$$M_1 C V_1 = \theta_1 ,$$
$$M_2 M_1 V_2 = \theta_2 .$$

Dann ist, wie leicht zu berechnen

$$T = \tfrac{1}{2} [m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2] ,$$
$$U = \frac{g}{2} [m_1 l_1 \theta_1^2 + m_2 (l_1 \theta_1^2 + l_2 \theta_2^2)] ;$$

die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 ,$$

und

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0,$$

nehmen also die Form an

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + g(m_1 + m_2)\theta_1 = 0,$$

und

$$m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + g m_2 \theta_2 = 0;$$

d. h.

$$\begin{cases} -(p_1 + p_2 + m_1 l_1 D^2)\theta_1 + p_2 \theta_2 = 0, \\ m_2 l_1 D^2 \theta_1 + (p_2 + m_2 l_2 D^2)\theta_2 = 0, \end{cases}$$

wo, der Einfachheit halber

$$p_1 = g m_1,$$
$$p_2 = g m_2$$

gesetzt worden ist.

Wie seiner Zeit angegeben wurde, wird jetzt die Elimination ausgeführt, indem man jeder Variabeln die Determinante der Koeffizienten vorsetzt (vgl. IV. Vorl. § 3).

Schreiben wir also θ statt θ_1 und θ_2, so bekommen wir

$$\begin{vmatrix} -(p_1 + p_2 + m_1 l_1 D^2) & p_2 \\ m_2 l_1 D^2 & p_2 + m_2 l_2 D^2 \end{vmatrix} \theta = 0.$$

Beim Entwickeln dieser Gleichung erhält man

$$[(p_1 + p_2 + m_1 l_1 D^2)(p_2 + m_2 l_2 D^2) + p_2 m_2 l_1 D^2]\theta = 0,$$

d. h.

$$[g^2 m_2 (m_1 + m_2) + g m_2 (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) D^2 + m_1 m_2 l_1 l_2 D^4]\theta = 0,$$

oder noch

1) $$[g^2 (m_1 + m_2) + g (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) D^2 + m_1 l_1 l_2 D^4]\theta = 0,$$

und endlich

$$[g^2 (1 + c) + g (1 + c)(l_1 + l_2) D^2 + l_1 l_2 D^4]\theta = 0,$$

wenn

$$\frac{m_2}{m_1} = c$$

gesetzt wird.

Die letzte Gleichung bietet einiges Interesse insofern sie zeigt, daß die Erscheinung nicht von den Massen m_1 und m_2, sondern nur von ihrem Verhältnis c abhängt. Als Charakteristik

leitet man

$$g^2(1+c)+g(1+c)(l_1+l_2)D^2+l_1 l_2 D^4=0$$

ab; das System strahlt also ein Spektrum von zwei Linien, mit den Perioden

$$\text{und (2)} \quad \begin{cases} T_1^* = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l_1l_2}{g(1+c)(l_1+l_2)-g\sqrt{(1+c)^2(l_1+l_2)^2-4(1+c)l_1l_2}}}, \\ T_2^* = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l_1l_2}{g(1+c)(l_1+l_2)+g\sqrt{(1+c)^2(l_1+l_2)^2-4(1+c)l_1l_2}}} \end{cases}$$

aus.

§ 5. Wir wollen jetzt einige Spezialfälle betrachten. Insbesondere nehmen wir an, daß die Masse m_1 sehr groß gegen m_2 ist, und zwar so groß, daß man

$$c=0$$

setzen kann.

Dann wird

$$\begin{aligned} T_1^* &= 2\pi\sqrt{\frac{2l_1l_2}{g(l_1+l_2)-g\sqrt{(l_1+l_2)^2-4l_1l_2}}}, \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{2l_1l_2}{g[l_1+l_2-(l_1-l_2)]}}, \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \end{aligned}$$

durch eine ähnliche Umformung erhält man

$$T_2^* = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

Mit anderen Worten, wenn wir durch T_1 und T_2 die Perioden bezeichnen, welche den isolierten Pendeln zukommen, alsdann dürfen wir

$$\begin{aligned} T_1^* &= T_1, \\ T_2^* &= T_2 \end{aligned}$$

setzen.

Die Eigenperioden wurden also durch die Koppelung gar nicht verändert; es entspricht dieser Fall den Hypothesen des dritten Paragraphen.

Wenn c klein, aber nicht allzu klein ist, leitet man aus Gleichungen (2)

$$T_1^* = 2\pi\sqrt{\frac{2l_1l_2}{g(1+c)(l_1+l_2)-g\sqrt{(1+2c)(l_1+l_2)^2-4(1+c)l_1l_2}}},$$

und

$$T_2^* = 2\pi \sqrt{\frac{2 l_1 l_2}{g(1+c)(l_1+l_2) + g\sqrt{(1+2c)(l_1+l_2)^2 - 4(1+c) l_1 l_2}}}$$

ab.

Diese Werte kann man nun durch passende Umformungen vereinfachen. Wir stellen dazu folgende Überlegung an.

Es ist

$$\begin{aligned}(1+2c)(l_1+l_2)^2 - 4(1+c) l_1 l_2 &= (l_1 - l_2)^2 + 2c(l_1^2 + l_2^2), \\ &= (l_1 - l_2)^2 \cdot \left[1 + 2c \frac{l_1^2 + l_2^2}{(l_1 - l_2)^2}\right].\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+2c)(l_1+l_2)^2 - 4(1+c) l_1 l_2} &= (l_1 - l_2)\sqrt{1 + 2c \frac{l_1^2 + l_2^2}{(l_1 - l_2)^2}}, \\ &= (l_1 - l_2)\left[1 + c \frac{l_1^2 + l_2^2}{(l_1 - l_2)^2}\right],\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}T_1^* &= 2\pi \sqrt{\frac{2 l_1 l_2}{g(1+c)(l_1+l_2) - g(l_1 - l_2)\left[1 + c \frac{l_1^2 + l_2^2}{(l_1 - l_2)^2}\right]}}, \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l_1 l_2}{g l_2 - g c \frac{l_2^2}{l_1 - l_2}}}, \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g\left(1 - \frac{c l_2}{l_1 - l_2}\right)}}, \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{2} \frac{c l_2}{l_1 - l_2}\right), \\ (2') \qquad &= T_1\left(1 + \tfrac{1}{2} \frac{c l_2}{l_1 - l_2}\right);\end{aligned}$$

auf ganz ähnliche Weise erhält man

$$(2') \quad T_2^* = T_2\left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{c l_1}{l_1 - l_2}\right).$$

Es ist ausdrücklich zu bemerken, daß bei dieser Ableitung stillschweigend die Verhältnisse

$$\frac{l_1}{l_1 - l_2} \text{ und } \frac{l_2}{l_1 - l_2}$$

als nicht zu groß angenommen wurden.

Je nachdem $T_1 \gtrless T_2$, d. h. $l_1 \gtrless l_2$, leitet man aus (2') ab.

$$T_1^* \gtrless T_1,$$

und

$$T_2^* \lessgtr T_2$$

Durch die Koppelung wird also die längere Periode verlängert und die kürzere verkürzt.

Es ist weiter

$$\frac{\partial}{\partial l_2} \frac{l_2}{l_1 - l^2} = \frac{l_1}{(l_1 - l_2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial l_1} \frac{l_1}{l_1 - l_2} = \frac{-l_2}{(l_1 - l_2)^2},$$

d. h.: die längere Periode wird um so mehr nach dem roten Ende hin des Spektrums verschoben, je größer das kleinere Pendel ist; die kürzere Periode dagegen wird um so weniger nach dem violetten Ende hin des Spektrums verschoben, je größer das längere Pendel ist.

Diesen Ergebnissen kann man einen höchst merkwürdigen Ausdruck geben. Wären nämlich die Perioden der isolierten Pendel unbekannt, so würden wir aus der Erfahrung ganz einfach entnehmen können, daß, wenn in dem System das eine Pendel unverändert bleibt, während die Länge des anderen fortwährend zunimmt, daß dann eine Linie (und zwar die dem unveränderlichen Pendel entsprechende) allmählich nach dem roten Ende des Spektrums hinrückt.

Wie leicht zu ersehen, stimmt aber dies Resultat mit den angegebenen (I. Vorl. § 8) Versuchsergebnissen von Bunsen und Lockyer vortrefflich überein.

Hierzu möchte ich noch bemerken, daß es wohl eine Willkürlichkeit ist, wenn wir sagen das eine Atom in einem zusammengesetzten Molekül emittiere gewisse Linien, und die übrigbleibenden Atome emittieren die anderen Linien des Spektrums. In Wirklichkeit strahlt, wie aus dem Modelle zu folgern ist, wahrscheinlich jedes Atom das ganze Spektrum aus (man vergleiche darüber die XIII. sowie die XX. Vorlesung).

§ 6. Auf die Theorie von Filippini zurückgreifend, wollen wir jetzt den Fall betrachten, daß die Pendel der Masse und der Länge nach genau gleich sind.

Aus den Gleichungen (2) leitet man

$$T_1^* = 2\pi\sqrt{\frac{2l^2}{4gl - g\sqrt{16l^2 - 8l^2}}},$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(2-\sqrt{2})}},$$

$$= \frac{T}{\sqrt{2-\sqrt{2}}},$$

$$= 1{,}31\,T$$

ab, und durch ähnliche Umformungen

$$T_2^* = \frac{T}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$= 0{,}54\,T.$$

Die Schwingungen der Massen m_1 und m_2 werden also durch die Summe von zwei Gliedern dargestellt, deren Perioden im Verhältnis der Zahlen 131 und 54 stehen.

§ 7. Lassen wir endlich m_1 zu Null werden, so wird aus Gleichung (1)

$$[g + (l_1 + l_2)D^2]\,\theta = 0,$$

was auch leicht vorauszusehen war: das System schwingt wie ein einfaches Pendel mit der Länge $l_1 + l_2$.

§ 8. Nach den Gleichungen (1) und (2) ist

$$\theta = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1\right) + A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_2^*} - \varphi_2\right);$$

man kann aber

$$\frac{t}{T_2^*} - \varphi_2 = \frac{t}{T_1^*} - \varphi_1 + \frac{t}{T_2^*} - \varphi_2 - \frac{t}{T_1^*} + \varphi_1$$

schreiben, d. h.

$$\frac{t}{T_2^*} - \varphi_2 = \frac{t}{T_1^*} - \varphi_1 - \left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^*\,T_2^*}\,t\right),$$

und dadurch wird der Ausdruck von θ zu

$$\theta = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1\right)$$

$$+ A_2 \sin 2\pi\left[\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1 - \left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^*\,T_2^*}\,t\right)\right].$$

Es geht also die Erscheinung in derselben Weise vor sich, als ob θ die Summe aus zwei Gliedern mit der (gemeinsamen) Periode T_1^*, und dem (veränderlichen) Phasenunterschiede

$$\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^* T_2^*} t$$

wäre.

Sind nun T_1^* und T_2^* beinahe gleich, so ist auch das Φ eine langsam veränderliche Größe; während einer Schwingung z. B. behält annäherungsweise das Φ seinen Wert.

Ist $\Phi = 1, 2, 3, \ldots$, d. h. $\Phi = 2n \cdot \frac{1}{2}$, so hat man ganz einfach

$$\theta = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1\right) + A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1\right),$$
$$= (A_1 + A_2) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1\right)$$

zu setzen; ist im Gegenteil $\Phi = (2n + 1) \cdot \frac{1}{2}$, so wird

$$\theta = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1\right) - A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1\right),$$
$$= (A_1 - A_2) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1^*} - \varphi_1\right).$$

Den Werten $\Phi = 2n \cdot \frac{1}{2}$ entsprechen also Maxima der Schwingungsamplitude, den Werten $\Phi = (2n + 1) \cdot \frac{1}{2}$ dagegen Minima.

Setzen wir der Reihe nach

$$\Phi' = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^* T_2^*} t' = 2n \cdot \tfrac{1}{2},$$

$$\Phi'' = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^* T_2^*} t'' = 2(n + 1) \cdot \tfrac{1}{2},$$

so leiten wir

$$\frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^* T_2^*} t' = \varphi_2 - \varphi_1 - 2n \cdot \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^* T_2^*} t'' = \varphi_2 - \varphi_1 - 2(n + 1) \cdot \tfrac{1}{2}$$

ab; also:

$$\frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^* T_2^*} (t' - t'') = [2(n + 1) - 2n] \cdot \tfrac{1}{2},$$
$$= 1,$$

und hieraus

$$t' - t'' = \frac{T_1^* T_2^*}{T_1^* - T_2^*} ;$$

durch das Zusammenwirken der Schwingungen werden daher Schwebungen hervorgebracht mit der Periode

$$\mathfrak{T} = \frac{T_1^* T_2^*}{T_1^* - T_2^*}.$$

§ 9. Durch Beobachtung der Schwebungen läßt sich nun Theorie und Erfahrung miteinander vergleichen, wie es Herr Filippini auch mit großem Geschick gezeigt hat.

Er wählte zwei Kupferkugeln vom Gewichte 3810 bzw. 41 g und stellte damit zwei getrennte Pendel her, deren Schwingungsperioden er bestimmte. Aus den Perioden wurden nun mittels der einfachen Formel

$$l = \frac{g T^2}{4 \pi^2}$$

die Längen bestimmt; sind aber die Längen l_1 und l_2 bekannt, so liefern Gleichungen (2) die korrigierten Perioden T_1^* und T_2^*, woraus wieder die Schwebung $\mathfrak{T}$ sich berechnen läßt. Zuletzt wurden die Pendel zu einem System nach Fig. 27 zusammengesetzt, und dessen Schwebungsdauer durch direkte Beobachtung bestimmt.

Nach dieser Methode erhielt man folgende Tabelle,

$c = 0{,}011$				$\mathfrak{T}$	
T_1	T_1^*	T_2	T_2^*	beobachtet	berechnet
1″,40	1″,41	1″,08	1″,07	4″,6	4″,4
1″,40	1″,46	1″,38	1″,31	12″,0	12″,7
1″,40	1″,37	1″,64	1″,66	7″,1	7″,8

welche ja eine recht genügende Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung erkennen läßt.

§ 10. Das System, das in Fig. 27 dargestellt ist, liefert ein Spektrum mit zwei Linien. Sehr leicht können wir jedoch unser Bild verallgemeinern. So strahlt z. B. das Modell der Fig. 29 drei Linien aus.

Mit leicht zu verstehenden Bezeichnungen wird in diesem Fall

$$T = \tfrac{1}{2}[m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2 + m_3 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_3)^2],$$

und

$$U = \frac{g}{2}\left[m_1 l_1 \theta_1^2 + m_2 (l_1 \theta_1^2 + l_2 \theta_2^2) + m_3 (l_1 \theta_1^2 + l_3 \theta_3^2)\right].$$

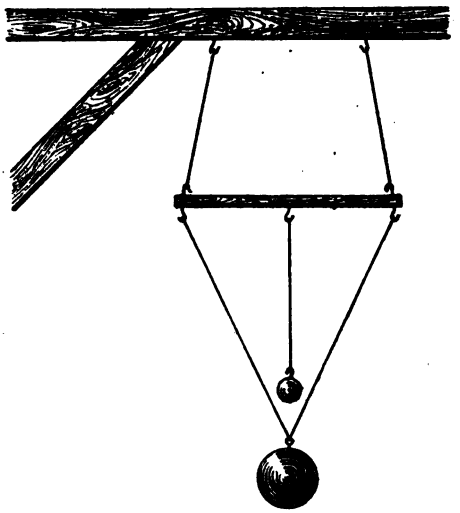


Fig. 29.

Jetzt hat man also drei Bewegungsgleichungen zu schreiben, d. h.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} + \frac{\partial U}{\partial \theta_3} = 0;$$

oder, beim Einsetzen der Werte von T und U

$$\begin{cases} m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + m_3 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_3 \ddot{\theta}_3) \\ \qquad + g (m_1 + m_2 + m_3) \theta_1 = 0, \\ m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + g m_2 \theta_2 = 0, \\ m_3 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_3 \ddot{\theta}_3) + g m_3 \theta_3 = 0. \end{cases}$$

Setzen wir, der Einfachheit halber

$$p_1 = g m_1,$$
$$p_2 = g m_2,$$
$$p_3 = g m_3,$$

so bekommen wir durch leichte Umformungen

$$\begin{cases} -(p_1 + p_2 + p_3 + m_1 l_1 D^2)\theta_1 + p_2 \theta_2 + p_3 \theta_3 = 0, \\ m_2 l_1 D^2 \theta_1 + (p_2 + m_2 l_2 D^2)\theta_2 = 0, \\ m_3 l_1 D^2 \theta_1 + (p_3 + m_3 l_3 D^2)\theta_3 = 0; \end{cases}$$

und daher

$$\begin{vmatrix} -(p_1 + p_2 + p_3 + m_1 l_1 D^2) & p_2 & p_3 \\ m_2 l_1 D^2 & p_2 + m_2 l_2 D^2 & 0 \\ m_3 l_1 D^2 & 0 & p_3 + m_3 l_3 D^2 \end{vmatrix} \theta = 0,$$

wenn wieder θ statt $\theta_1 \cdot \theta_2$ und θ_3 geschrieben wird.

Führt man weiter die Bezeichnungen

$$\frac{m_2}{m_1} = c, \qquad \frac{m_3}{m_1} = e$$

ein, so erhält man

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} -(g + g c + g e + l_1 D^2) & g c & g e \\ l_1 D^2 & g + l_2 D^2 & 0 \\ l_1 D^2 & 0 & g + l_3 D^2 \end{vmatrix} \theta = 0,$$

oder, was dasselbe ist

$$\begin{vmatrix} -(g + l_1 D^2) & g c & g e \\ g + (l_1 + l_2) D^2 & g + l_2 D^2 & 0 \\ g + (l_1 + l_3) D^2 & 0 & g + l_3 D^2 \end{vmatrix} \theta = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber unmittelbar die Charakteristik

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(g + l_1 D^2)(g + l_2 D^2)(g + l_3 D^2) \\ &+ g c\{[g + (l_1 + l_2) D^2](g + l_3 D^2)\} \\ &+ g e\{[g + (l_1 + l_3) D^2](g + l_2 D^2)\} = 0. \end{aligned}$$

§ 11. Es ist nicht der Mühe wert, die Wurzeln der allgemeinen Charakteristik aufzusuchen, immerhin können wir einiges durch die Betrachtung von Spezialfällen lernen.

Setzen wir zunächst

$$c = e = 0;$$

dann wird

$$\begin{vmatrix} -(g + l_1 D^2) & 0 & 0 \\ l_1 D^2 & g + l_2 D^2 & 0 \\ l_1 D^2 & 0 & g + l_3 D^2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$(g + l_1 D^2)(g + l_2 D^2)(g + l_3 D^2) = 0,$$

es sendet also das zusammengesetzte System (Molekül) dieselben Linien aus, die von den isolierten Pendeln (Atomen) emittiert werden.

§ 12. Wird bloß $e = 0$ gesetzt, so bekommt man

$$\begin{vmatrix} -(g + gc + l_1 D^2) & gc & 0 \\ l_1 D^2 & g + l_2 D^2 & 0 \\ l_1 D^2 & 0 & g + l_3 D^2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$(g + l_3 D^2) \cdot \begin{vmatrix} -(g + gc + l_1 D^2) & gc \\ l_1 D^2 & g + l_2 D^2 \end{vmatrix} = 0,$$

und endlich

$$(g + l_3 D^2) \cdot [g^2(1 + c) + g(1 + c)(l_1 + l_2) D^2 + l_1 l_2 D^4] = 0.$$

Wie leicht zu ersehen, werden jetzt drei Linien mit den Perioden T_1^*, T_2^* und T_3 ausgestrahlt; dabei ist

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{l_3}{g}},$$

und die Werte von T_1^* und T_2^* sind aus den Gleichungen (2) zu entnehmen.

§ 13. Drittens wollen wir c und e als kleine Größen betrachten, was einem im Paragraphen 5 behandelten Falle entspricht. Sind c und e so klein, daß man die Glieder zweiter und dritter Ordnung gegenüber den Gliedern erster Ordnung vernachlässigen darf, so können wir offensichtlich der Charakteristik (4) die Form

$$\left[g + l_1 D^2 - g\frac{c l_2}{l_1 - l_2} - g\frac{e l_3}{l_1 - l_3}\right] \cdot \left[g + l_2 D^2 + g\frac{c l_1}{l_1 - l_2}\right] \cdot \left[g + l_3 D^2 + g\frac{e l_1}{l_1 - l_3}\right] = 0$$

geben.

Beim Entwickeln bekommt man nämlich folgende Glieder erster Ordnung

$$-g\frac{c\,l_2}{l_1-l_2}(g+l_2D^2)(g+l_3D^2)$$
$$+g\frac{c\,l_1}{l_1-l_2}(g+l_1D^2)(g+l_3D^2)$$
$$-g\frac{e\,l_3}{l_1-l_3}(g+l_3D^2)(g+l_2D^2)$$
$$+g\frac{e\,l_1}{l_1-l_3}(g+l_1D^2)(g+l_2D^2),$$

oder, nach leichten Umformungen

$$\frac{g\,c}{l_1-l_2}(g+l_3D^2)[l_1(g+l_1D^2)-l_2(g+l_2D^2)]$$
$$+\frac{g\,e}{l_1-l_3}(g+l_2D^2)[l_1(g+l_1D^2)-l_3(g+l_3D^2)]$$
$$=g\,c\{[g+(l_1+l_2)D^2](g+l_3D^2)\}$$
$$+g\,e\{[g+(l_1+l_3)D^2](g+l_2D^2)\},$$

was eben mit den Gliedern erster Ordnung von Gleichung (4) vollständig übereinstimmt.

Es kommt daher unserem System ein Spektrum mit drei Linien zu, deren Perioden durch die Formeln

$$T_1^* = T_1\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{c\,l_2}{l_1-l_2}+\tfrac{1}{2}\frac{e\,l_3}{l_1-l_3}\right),$$
$$T_2^* = T_2\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{c\,l_1}{l_1-l_2}\right),$$
$$T_3^* = T_3\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{e\,l_1}{l_1-l_3}\right)$$

zu bestimmen sind.

§ 14. Sind die Massen m_1, m_2 und m_3 von derselben Größenordnung, so wird im allgemeinen Gleichung (3) zu verwickelt, und die Perioden lassen sich nicht mit einfachen Rechnungen angeben. Doch wollen wir noch den Fall betrachten in dem

$$l_1 = l_2 = l_3 = l, \qquad m_1 = m_2 = m_3 = m$$

ist, was den im Paragraphen 6 angestellten Hypothesen entspricht.

Jetzt wird als Charakteristik

$$\begin{vmatrix} -(g+lD^2) & g & g \\ g+2lD^2 & g+lD^2 & 0 \\ g+2lD^2 & 0 & g+lD^2 \end{vmatrix} = 0$$

erhalten, und daher

$$(g + l D^2)^3 + g(g + l D^2)(g + 2 l D^2) + g(g + l D^2)(g + 2 l D^2) = 0,$$

d. h., der Reihe nach

$$(g + l D^2)[(g + l D^2)^2 + 2 g(g + 2 l D^2)] = 0,$$

$$(g + l D^2)[3(g + l D^2)^2 - 2 l^2 D^4] = 0,$$

$$(g + l D^2)[(g + l D^2)\sqrt{3} - l D^2\sqrt{2}][(g + l D^2)\sqrt{3} + l D^2\sqrt{2}] = 0,$$

$$(g + l D^2)[g\sqrt{3} + l(\sqrt{3} - \sqrt{2}) D^2][g\sqrt{3} + l(\sqrt{3} + \sqrt{2}) D^2] = 0,$$

woraus sich unmittelbar die Perioden ableiten

$$T_1^* = 2\pi \sqrt{\frac{l(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{g\sqrt{3}}} = T \sqrt{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = 0{,}43\, T,$$

$$T_2^* = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = T,$$

$$T_3^* = 2\pi \sqrt{\frac{l(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{g\sqrt{3}}} = T \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = 1{,}35\, T.$$

Die Schwingungen der Massen m_1, m_2 und m_3 werden also durch die Summe von drei Gliedern dargestellt, deren Perioden in den Verhältnissen der Zahlen 43, 100 und 135 stehen.

§ 15. Sehr leicht läßt sich die im Paragraphen 13 entwickelte Theorie für den Fall verallgemeinern, indem an dem Stabe (Fig. 29) statt zwei, n verschiedene Pendel hängen.

Es nehmen dann die Bewegungsgleichungen die übersichtliche Form an

$$m l \ddot{\theta} + \sum_1^n{}_\nu m_\nu (l \ddot{\theta} + l_\nu \ddot{\theta}_\nu) + g(m + \sum_1^n{}_\nu m_\nu)\, \theta = 0,$$

$$m_\nu (l \ddot{\theta} + l_\nu \ddot{\theta}_\nu) + g\, m_\nu \theta_\nu = 0. \qquad (\nu = 1.2 \ldots n)$$

Setzt man den vorigen Bezeichnungen entsprechend

$$\frac{m_\nu}{m} = c_\nu,$$

und betrachtet die c_ν als kleine Größen, so sind die $n+1$ Perioden durch die Formeln

$$T^* = T\left(1 + \tfrac{1}{2}\sum_1^n{}_\nu \frac{c_\nu l_\nu}{l - l_\nu}\right),$$

$$T_\nu^* = T_\nu\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{c_\nu l}{l - l_\nu}\right)$$

gegeben.

Hierüber können wir ganz ähnliche Betrachtungen wie im Paragraphen 5 anstellen, wodurch für die von Bunsen und Lockyer festgestellten Tatsachen ein recht allgemeines mechanisches Bild gewonnen wird.

§ 16. Die Koppelungsart, die wir bis jetzt betrachtet haben ist nicht die einzige, durch die man zwei Pendel verbinden kann. Sehr oft wird z. B. bei Experimentalvorlesungen ein Versuch angestellt, indem zwei an einer gespannten Saite hängende Pendel die Resonanzerscheinungen darstellen sollen. Auch in diesem Falle werden die Eigenperioden durch die gegenseitige Wirkung beeinflußt, womit ein neues mechanisches Bild für die Lichtprozesse in komplizierten Molekülen bezw. Atomen gegeben ist.

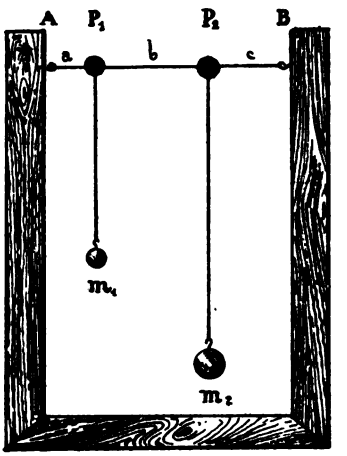


Fig. 30.

Übergehend zur Betrachtung eines solchen Systems denken wir uns also eine in ihren Endpunkten A und B (Fig. 30) festgehaltene, gewichtslose, gespannte, elastische Saite.

Es seien in P_1 und P_2 zwei Massen μ_1 und μ_2 befestigt, und es liege die Saite in einer horizontalen Ebene; bei einer Verschiebung wollen wir mit ξ_1 und ξ_2 die Horizontalkoordinaten von μ_1 und μ_2 bezeichnen. Weiter nehmen wir an, es hängen von P_1 und P_2 zwei durch die Konstanten $(l_1 . m_1)$ und $(l_2 . m_2)$ definierte Pendel herab; die Pendel bewegen sich in zwei der Linie AB senkrechten Ebenen, und ihre Stellungen

seien durch die Winkelkoordinaten θ_1 und θ_2 in üblicher Weise bestimmt.
Es wird dann

$$T = \tfrac{1}{2}[\mu_1 \dot{\xi}_1^{\,2} + \mu_2 \dot{\xi}_2^{\,2} + m_1 (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{\xi}_1)^2 + m_2 (l_2 \dot{\theta}_2 + \dot{\xi}_2)]^2 ,$$

und

$$U = \frac{\xi_1^{\,2}}{2a}\tau^2 + \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{2b}\tau^2 + \frac{\xi_2^{\,2}}{2c}\tau^2 + \frac{g}{2}(m_1 l_1 \theta_1^{\,2} + m_2 l_2 \theta_2^{\,2}),$$

wie man durch eine, der in Vorl. VI. § 1 angegebenen ganz ähnliche Rechnung leicht beweisen kann.

Hieraus leiten wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1} = \mu_1 \ddot{\xi}_1 + m_1 (l_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\xi}_1), \qquad \frac{\partial U}{\partial \xi_1} = \frac{\xi_1}{a}\tau^2 - \frac{\xi_2 - \xi_1}{b}\tau^2,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_2} = \mu_2 \ddot{\xi}_2 + m_2 (l_2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{\xi}_2), \qquad \frac{\partial U}{\partial \xi_2} = \frac{\xi_2}{c}\tau^2 + \frac{\xi_2 - \xi_1}{b}\tau^2,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1 (l_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\xi}_1), \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = g m_1 l_1 \theta_1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2 (l_2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{\xi}_2), \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = g m_2 l_2 \theta_2$$

ab, und daher

$$\begin{cases} \mu_1 \ddot{\xi}_1 + m_1 (l_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\xi}_1) + \frac{\xi_1}{a}\tau^2 - \frac{\xi_2 - \xi_1}{b}\tau^2 = 0, \\ \mu_2 \ddot{\xi}_2 + m_2 (l_2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{\xi}_2) + \frac{\xi_2}{c}\tau^2 + \frac{\xi_2 - \xi_1}{b}\tau^2 = 0, \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\xi}_1 + g\theta_1 = 0, \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{\xi}_2 + g\theta_2 = 0; \end{cases}$$

d. h., bei einfachen Umformungen

$$\begin{cases} \mu_1 \ddot{\xi}_1 - g m_1 \theta_1 + \left(\frac{\tau^2}{a} + \frac{\tau^2}{b}\right)\xi_1 - \frac{\tau^2}{b}\xi_2 = 0, \\ \mu_2 \ddot{\xi}_2 - g m_2 \theta_2 - \frac{\tau^2}{b}\xi_1 + \left(\frac{\tau^2}{b} + \frac{\tau^2}{c}\right)\xi_2 = 0, \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\xi}_1 + g\theta_1 = 0, \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{\xi}_2 + g\theta_2 = 0. \end{cases}$$

Setzt man, der Einfachheit halber

$$\frac{\tau^2}{a} = A, \qquad \frac{\tau^2}{b} = B, \qquad \frac{\tau^2}{c} = C,$$

so nehmen die Bewegungsgleichungen die Endform

$$\begin{cases} (A + B + \mu_1 D^2)\xi_1 - B\xi_2 - g m_1 \theta_1 = 0, \\ -B\xi_1 + (B + C + \mu_2 D^2)\xi_2 - g m_2 \theta_2 = 0, \\ D^2 \xi_1 + (g + l_1 D^2)\theta_1 = 0, \\ D^2 \xi_2 + (g + l_2 D^2)\theta_2 = 0 \end{cases}$$

an; es genügt also jede Koordinate einer Differentialgleichung, deren Charakteristik

$$\begin{vmatrix} -(A + B + \mu_1 D^2) & B & m_1 g & 0 \\ B & -(B + C + \mu_2 D^2) & 0 & m_2 g \\ D^2 & 0 & g + l_1 D^2 & 0 \\ 0 & D^2 & 0 & g + l_2 D^2 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Wie man aus dieser Gleichung entnehmen kann, strahlt unser System ein Spektrum von vier Linien aus, doch liegen die Verhältnisse leider zu verwickelt, als daß wir ganz allgemein die Eigenperioden angeben könnten.

Um ein besonderes System vollständig zu berechnen wollen wir daher folgende Festsetzungen einführen

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_2 = 0, \\ A &= B = C = h, \\ m_1 &= m_2 = m, \\ l_1 &= l_2 = l; \end{aligned}$$

wodurch die Charakteristik sich zu

$$\begin{vmatrix} -2h & h & mg & 0 \\ h & -2h & 0 & mg \\ D^2 & 0 & g + l D^2 & 0 \\ 0 & D^2 & 0 & g + l D^2 \end{vmatrix} = 0$$

umformen läßt.

Der Reihe nach wird jetzt erhalten

$$\begin{vmatrix} -2h & h & mg & 0 \\ h & -2h & 0 & mg \\ D^2 & 0 & g+lD^2 & 0 \\ 0 & D^2 & 0 & g+lD^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2h & h & mg & 0 \\ D^2 & 0 & g+lD^2 & 0 \\ h & -2h & 0 & mg \\ 0 & D^2 & 0 & g+lD^2 \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} -2h & mg & h & 0 \\ D^2 & g+lD^2 & 0 & 0 \\ h & 0 & -2h & mg \\ 0 & 0 & D^2 & g+lD^2 \end{vmatrix}.$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} -2h & mg \\ D^2 & g+lD^2 \end{vmatrix} \right\}^2 - \left\{ \begin{vmatrix} h & mg \\ 0 & g+lD^2 \end{vmatrix} \right\}^2,$$

$$= \begin{vmatrix} -h & mg \\ D^2 & g+lD^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3h & mg \\ D^2 & g+lD^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es spaltet sich nämlich die Charakteristik in zwei Gleichungen, also:

$$hg + (lh + mg)D^2 = 0,$$
$$3hg + (3lh + mg)D^2 = 0;$$

woraus folgende Eigenperioden sich ableiten

$$T_1^* = 2\pi\sqrt{\frac{lh+mg}{hg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{mg}{hl}\right)},$$

und

$$T_2^* = 2\pi\sqrt{\frac{3lh+mg}{3hg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\tfrac{1}{3}\frac{mg}{hl}\right)}.$$

In praktischen Fällen ist nun mg/hl eine ziemlich kleine Größe, und wir nehmen daher an es seien die Glieder zweiter Ordnung schon zu vernachlässigen.

Dann wird

$$(5) \quad \begin{cases} T_1^* = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon) = T(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon), \\ T_2^* = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\tfrac{1}{6}\varepsilon) = T(1+\tfrac{1}{6}\varepsilon), \end{cases}$$

wo für mg/hl ε geschrieben ist.

Mit anderen Worten: Es senden zwei genau gleiche Pendel zu einem System gekoppelt ein Doublet aus.

Sind durch direkte Versuche T_1^* und T_2^* bekannt, so können wir leicht T und ε berechnen; denn aus den Gleichungen (5) folgt

$$T = \tfrac{1}{2} \frac{T_2^* (T_1^* + T_2^*)}{T_1^*},$$

und

$$\varepsilon = 3 \frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^*}.$$

Es wäre z. B. möglich, zu berechnen, wie groß Pendel und Spannung sein müssen, damit das System die zwei (Natrium) D-Linien aussende.

Dritter Abschnitt.

Elektromagnetische Theorie.

Achte Vorlesung.

Leiter mit einem einzigen Freiheitsgrad: elektromagnetische Emissionstheorie.

§ 1. Gleichungen des elektromagnetischen Feldes. — § 2. Das Vektorpotential; Umformung des Ausdruckes für die magnetische Energie. — § 3—4. Neue Ausdrücke für die potentielle Energie und Dissipationsfunktion. — § 5—7. Schwingungen in einem Leiter mit einem einzigen Freiheitsgrade. — § 8—10. Das Feld um eine geradlinige Schwingung. — § 11. Poynting'scher Satz. — § 12. Berechnung der von einer einfachen Schwingung ausgestrahlten Energie. — § 13. Anwendung auf die Lichtemission.

§ 1. Es wurde in der zweiten Vorlesung gezeigt, daß durch Hertzsche Erreger und Resonatoren die Vorgänge der Emission, sowie der Brechung und Dispersion des Lichtes nachgeahmt werden können. Zur Betrachtung der elektromagnetischen Theorien übergehend fangen wir daher am besten damit an, daß wir die Schwingungen eines einfachen Erregers und die Größe seiner Strahlung berechnen.

Die Gleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper schreibt man nun passend, nach H. Hertz, in der Form

$$(1)\qquad \begin{cases} A\mu \dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\mu \dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\mu \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} A\varepsilon\dfrac{\partial X}{\partial t} + 4\pi A\lambda X = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y}, \\ A\varepsilon\dfrac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi A\lambda Y = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z}, \\ A\varepsilon\dfrac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi A\lambda Z = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x}.^{1}) \end{cases}$$

Hierbei sind mit X, Y, Z bzw. L, M, N die Komponenten der elektrischen bzw. der magnetischen Kraft, mit ε bzw. μ die Dielektrisierungs- bzw. die Magnetisierungskonstante, mit λ die Leitungsfähigkeit, mit $1/A$ endlich die Lichtgeschwindigkeit [$= 3.10^{10}(\mathrm{C.S^{-1}})$] bezeichnet.

Es wird durch

$$(3)\qquad T = \frac{\mu}{8\pi}\int (L^2 + M^2 + N^2)\, d\tau$$

die magnetische Energie, welche im Raume τ enthalten ist, angegeben; durch

$$(4)\qquad U = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau$$

dagegen die dielektrische Energie (man vergleiche hierüber die V. Vorlesung § 3).

Sehr oft setzt man

$$(5)\qquad f = \lambda X, \qquad g = \lambda Y, \qquad h = \lambda Z,$$

und nennt f, g und h die Komponenten des Leitungsstromes.

Dann ist die Dissipationsfunktion (also die Hälfte aus der Jouleschen Wärme) nach der Formel

$$(6)\qquad V = \frac{1}{2}\int \lambda (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\lambda}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

zu berechnen.

Aus den Gleichungen (2) erhält man

$$(7)\qquad \begin{cases} A\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int \varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau \\ \qquad\qquad + 4\pi A\displaystyle\int \lambda\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau = 0, \end{cases}$$

[1]) Das benutzte Koordinatensystem ist wie vorher von solcher Beschaffenheit, daß, wenn die Richtung der positiven x von uns aus nach vorn, die der positiven z von uns aus nach oben geht, alsdann die y von links nach rechts hin wachsen.

und wenn λ in τ überall gleich Null ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)d\tau = 0,$$

d. h.

$$\int \varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)d\tau = 4\pi q;$$

hierin ist mit q eine konstante (von der Zeit unabhängige) Größe, die sogenannte Elektrizitätsmenge gemeint.

§ 2. Man setze

$$F=\int\frac{f}{r}d\tau, \qquad G=\int\frac{g}{r}d\tau, \qquad H=\int\frac{h}{r}d\tau,$$

und

$$(*)\quad \begin{cases} L = A\left(\dfrac{\partial G}{\partial z}-\dfrac{\partial H}{\partial y}\right), \qquad M = A\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}-\dfrac{\partial F}{\partial z}\right), \\ N = A\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\partial G}{\partial x}\right), \end{cases}$$

wo r den Abstand des Raumelementes $d\tau$ vom Punkte (x, y, z) bedeutet.

Es soll nun gezeigt werden, daß bei konstanten bzw. bei langsam veränderlichen elektrischen Kräften, System (*) ein Integral von System (2) darstellt.

Es wird nämlich

$$\frac{\partial M}{\partial z} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right), \qquad -\frac{\partial N}{\partial y} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right),$$

und daher

$$\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y} = A\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)-\Delta F\right].$$

Wir erhalten aber, wie leicht zu berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=0 \quad \text{und} \quad -\Delta F = 4\pi f,$$

also:

$$\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y} = 4\pi A f,$$

was eben zu beweisen war.

Hiernach wollen wir den Ausdruck (3) für die magnetische Energie umformen.

Es wird

$$T = \frac{\mu}{8\pi}\int (L^2 + M^2 + N^2)\,d\tau,$$

$$= \frac{A\mu}{8\pi}\int \left[L\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \ldots\right] d\tau,$$

und nach dem Gaußchen Lehrsatz (IV. Vorl. § 6)

$$T = \frac{A\mu}{8\pi}\int \left[F\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + \ldots\right] d\tau,$$

$$= \frac{A^2\mu}{2}\int (Ff + Gg + Hh)\,d\tau,$$

$$= \frac{A^2\mu}{2}\int\int \frac{ff' + gg' + hh'}{r}\,d\tau\,d\tau'.$$

Werden nun die Ströme durch dünne Drähte geleitet, so erhält man

$$T = \frac{A^2\mu}{2}\int\int \frac{ii'\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

wo mit ε der Winkel (ds, ds') gemeint ist.

Nehmen wir weiter an, es gäbe nur einen einzigen Draht, und es habe der Strom überall dieselbe Intensität, so hat man endlich

$$T = \frac{A^2\mu i^2}{2}\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

$$= \frac{1}{2}Li^2, \tag{3'}$$

$$L = A^2\mu\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'$$

zu setzen. L wird bekanntlich als Selbstinduktionskoeffizient des Leiters bezeichnet.[1])

[1]) Beim Vergleichen der Ausdrücke

$$T = \frac{A^2\mu}{2}\int (Ff + Gg + Hh)\,d\tau$$

und

$$T = \frac{1}{2}Li^2,$$

wird

$$Li^2 = A^2\mu\int (Ff + Gg + Hh)\,d\tau. \tag{3''}$$

§ 3. Einer ähnlichen Umformung unterwerfen wir jetzt die dielektrische Energie. Bei langsam veränderlichen magnetischen Kräften wird aus (1)

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Es zeigen aber diese Bedingungen, daß die Komponenten X, Y, Z aus einer einzigen Funktion $-\varphi$ durch Derivation nach den Koordinaten abzuleiten sind.

Wir schreiben demnach

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und

$$U = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau,$$

$$= -\frac{\varepsilon}{8\pi}\int \left(X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) d\tau,$$

also nach dem Gaußschen Lehrsatz

$$U = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int \varphi \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau,$$

$$= \frac{1}{2}\int \varphi\, dq.$$

Gibt es im Raume τ einen einzigen Leiter, so wird ganz einfach

$$U = \frac{\varphi}{2}\int dq = \tfrac{1}{2}\varphi q,$$

oder, bei Einführung der Kapazität (C) durch die Definitionsgleichung $\varphi = \frac{q}{C}$

$$U = \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{C}. \tag{4'}$$

§ 4. Die Dissipationsfunktion kann man endlich, für den Fall eines dünnen stromdurchflossenen Drahtes, in passender Weise darstellen.

Es wird der Reihe nach

$$V = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\lambda}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau,$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{i^2}{\lambda}\,\frac{d\tau}{(d\sigma)^2},$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{i^2}{\lambda}\,\frac{ds}{d\sigma},$$

$$= \frac{i^2}{2}\int \frac{ds}{\lambda\, d\sigma},$$

$$= \tfrac{1}{2} R\, i^2, \tag{6'}$$

wo unter R der Widerstand des Leitungsdrahtes zu verstehen ist.

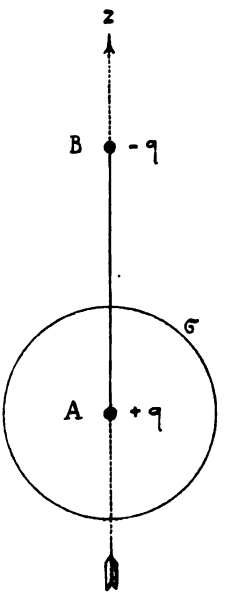


Fig. 31.

§ 5. Die eben abgeleiteten Ausdrücke (3'), (4') und (6') wollen wir jetzt dazu benutzen, daß wir die elektrischen Vorgänge in einem Leiter berechnen, der durch Fig. 31 dargestellt wird.

Es handelt sich hier um zwei genau gleiche Kapazitäten, welche durch einen dünnen Draht miteinander verbunden sind. Die Ladungen sollen im Anfangszustand, also während des ganzen Prozesses, gleiche Werte und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Für eine Fläche σ, die den positiven Endleiter zu irgend einer Zeit umfaßt, wird nun nach (7)

$$A\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau$$

$$+ 4\pi A\int \lambda\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau = 0,$$

d. h. (IV. Vorl. § 5)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dq + \int [\lambda X\cos(n,x) + \lambda Y\cos(n,y) + \lambda Z\cos(n,z)]\, d\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\int [f\cos(n,x) + g\cos(n,y) + h\cos(n,z)]\, d\sigma,$$

also:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -i;$$

wobei mit n die äußere Normale bezeichnet wurde. Für ruhende Systeme ist nun $\partial/\partial t$ dasselbe wie d/dt; wir dürfen

daher

$$\frac{dq}{dt} = -i,$$

und also

$$i = -\dot{q}$$

schreiben.

Damit erhalten aber T und V, nach (3') und (6') folgende Endform

$$T = \tfrac{1}{2} L \dot{q}^2, \qquad V = \tfrac{1}{2} R \dot{q}^2.$$

Was die dielektrische Energie betrifft, so bekommt sie offenbar zwei gleiche Glieder, welche den beiden Endleitern entsprechen, es wird also, nach (4')

$$U = \tfrac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \tfrac{1}{2} \frac{q^2}{C} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Die Bewegungsgleichung bringen wir jetzt nach Lagrange (IV. Vorl. § 2) in die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0,$$

indem wir die magnetische Energie als eine kinetische, die dielektrische Energie aber als eine potentielle betrachten.

Es wird

$$L\ddot{q} + \frac{2}{C} q + R\dot{q} = 0,$$

d. h.

$$\left(L D^2 + R D + \frac{2}{C}\right) q = 0,$$

und, als Charakteristik (IV. Vorl. § 4)

$$L D^2 + R D + \frac{2}{C} = 0,$$

woraus

$$D = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{CL}}$$

folgt.

Betrachten wir jetzt den speziellen Fall, in welchem die Größe $(R^2/4L^2) - (2/CL)$ negativ ist. Dann darf man

$$D = -\frac{R}{2L} \pm i\mathfrak{n}$$

wenn

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{2}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

setzen.

Wir schreiben

$$c_1 = -\frac{R}{2L} + i\mathfrak{n}, \qquad c_2 = -\frac{R}{2L} - i\mathfrak{n},$$

wodurch das allgemeine Integral unserer Gleichung zu

$$q = C_1 e^{c_1 t} + C_2 e^{c_2 t}$$

wird. Hier sind C_1 und C_2 Integrationskonstanten, welche aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind (IV. Vorl. § 4).

Man denke sich z. B. es sei für $t = 0$

$$q = Q, \qquad i = 0;$$

dann erhält man

$$C_1 + C_2 = Q, \qquad C_1 c_1 + C_2 c_2 = 0,$$

also:

$$C_1 = -\frac{Q c_2}{2 i \mathfrak{n}}, \qquad C_2 = \frac{Q c_1}{2 i \mathfrak{n}},$$

und, beim Einsetzen dieser Werte

$$\begin{cases} q = Q e^{-\frac{R}{2L} t} \left(\cos \mathfrak{n} t + \frac{R}{2 \mathfrak{n} L} \sin \mathfrak{n} t\right), \\ i = -\frac{dq}{dt} = \frac{2Q}{\mathfrak{n} C L} e^{-\frac{R}{2L} t} \sin \mathfrak{n} t. \end{cases}$$

Ist der Widerstand eine kleine Größe, und zwar eine so kleine, daß man sie gegen L vernachlässigen darf, so wird

$$\begin{cases} q = Q \cos \mathfrak{n} t, \\ i = \mathfrak{n} Q \sin \mathfrak{n} t. \end{cases}$$

§ 6. Es fragt sich nun, wie in den Punkten, welche dem Leiter sehr nahe liegen, das (elektrische) Potential φ (diese Vorl. § 3) darzustellen ist.

Dazu denken wir uns den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems in der unteren (positiven) Endladung gelegen und bezeichnen mit z die Achse, welche in der Richtung des Leitungsdrahtes liegt, und mit l den Abstand AB (Fig. 31).

Dann sind

$$\frac{q}{r} \quad \text{und} \quad -\left(\frac{q}{r} - \frac{\partial\left(\frac{q}{r}\right)}{\partial z} l\right)$$

die Potentiale, welche von dem unteren positiven bzw. von dem oberen negativen Leiter hervorgerufen werden. Das Gesamt-

potential ist also durch die Formel

$$\varphi = \frac{q}{r} - \left(\frac{q}{r} - \frac{\partial\left(\frac{q}{r}\right)}{\partial z} l\right),$$

$$= q\, l \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z},$$

$$= Q\, l \cos \mathfrak{n}\, t \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}$$

zu berechnen.

§ 7. Sehr einfach leiten wir auch einen Ausdruck ab für die magnetische Kraft, welche vom Stromelement l ausgeübt wird. Man hat jetzt $f = g = 0$, also $F = G = 0$, zu setzen, und bekommt, nach den Gleichungen (*) (§ 2)

$$L = -A \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad M = A \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad N = 0;$$

es ist aber

$$H = \int \frac{h}{r} d\tau = \frac{i\, l}{r},$$

woraus sich

$$L = -A\, i\, l \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}, \qquad M = A\, i\, l \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$$

ergibt.

Beim Ausführen der angedeuteten Differentiationen wird nun

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\frac{y}{r} = -\frac{1}{r^2}\cos(r, y),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{1}{r^2}\cos(r, x),$$

also:

$$L = \frac{A\, i\, l}{r^2}\cos(r, y), \qquad M = -\frac{A\, i\, l}{r^2}\cos(r, x);$$

es berechnet sich daher die gesamte magnetische Kraft zu

$$\mathfrak{M} = -\sqrt{L^2 + M^2} = -\frac{A\, i\, l}{r^2}\sqrt{\cos^2(r, x) + \cos^2(r, y)},$$

$$= -\frac{A\, i\, l}{r^2}\sqrt{1 - \cos^2(r, z)},$$

$$= -\frac{A\, i\, l}{r^2}\sin(r, z),$$

$$= -\frac{A\, Q\, l\, \mathfrak{n}}{r^2}\sin \mathfrak{n}\, t \sin(r, z).$$

§ 8. Die Theorie, die wir eben dargestellt haben, zeigt, daß unter passenden Verhältnissen von einem elektrischen Leiter schwingende Ströme zu erhalten sind. Es ist jetzt interessant zu fragen, was für Kräfte unser Leiter in der Ferne hervorrufen wird.

Um dieses Problem zu lösen, formen wir die Fundamentalgleichungen um, indem wir ein System von krummlinigen Koordinaten einführen.

Dann wird bekanntlich das Linienelement durch

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2$$

ausgedrückt; die Flächenelemente sind aber

$$VW\,dv\,dw, \qquad WU\,dw\,du \qquad \text{und} \qquad UV\,du\,dv.$$

Nach dem Stokesschen Lehrsatz (IV. Vorl. § 8) ist nun

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right] d\sigma,$$

also, nach Gleichungen (1)

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = A\frac{\partial}{\partial t}\int \mu[L\cos(n,x) + M\cos(n,y) + N\cos(n,z)]\,d\sigma.$$

Nennt man jetzt bei dem neueingeführten System $\mathfrak{E}_u \cdot \mathfrak{E}_v \cdot \mathfrak{E}_w \cdot \mathfrak{M}_u \cdot \mathfrak{M}_v \cdot \mathfrak{M}_w$ die Komponenten der elektrischen bzw. der magnetischen Kraft, so wird

$$\int (U\mathfrak{E}_u\,du + V\mathfrak{E}_v\,dv + W\mathfrak{E}_w\,dw) = A\frac{\partial}{\partial t}\iint \mu(VW\mathfrak{M}_u\,dv\,dw + WU\mathfrak{M}_v\,dw\,du + UV\mathfrak{M}_w\,du\,dv),$$

$$= \iint \left\{\left[\frac{\partial(W\mathfrak{E}_w)}{\partial v} - \frac{\partial(V\mathfrak{E}_v)}{\partial w}\right] dv\,dw + \left[\frac{\partial(U\mathfrak{E}_u)}{\partial w} - \frac{\partial(W\mathfrak{E}_w)}{\partial u}\right] dw\,du + \left[\frac{\partial(V\mathfrak{E}_v)}{\partial u} - \frac{(\partial\,U\mathfrak{E}_u)}{\partial v}\right] du\,dv\right\},$$

also:

$$(1') \qquad \begin{cases} A\mu VW\dfrac{\partial \mathfrak{M}_u}{\partial t} = \dfrac{\partial(W\mathfrak{E}_w)}{\partial v} - \dfrac{\partial(V\mathfrak{E}_v)}{\partial w}, \\ A\mu WU\dfrac{\partial \mathfrak{M}_v}{\partial t} = \dfrac{\partial(U\mathfrak{E}_u)}{\partial w} - \dfrac{\partial(W\mathfrak{E}_w)}{\partial u}, \\ A\mu UV\dfrac{\partial \mathfrak{M}_w}{\partial t} = \dfrac{\partial(V\mathfrak{E}_v)}{\partial u} - \dfrac{\partial(U\mathfrak{E}_u)}{\partial v}. \end{cases}$$

Durch eine ähnliche Rechnung wird aus

$$\int (L\,dx + M\,dy + N\,dz)$$

$$= -A\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon\,[X\cos(n,x) + Y\cos(n,y) + Z\cos(n,z)]\,d\sigma$$

$$- 4\pi A\int [f\cos(n,x) + g\cos(n,y) + h\cos(n,z)]\,d\sigma\,,$$

die nach dem Stokesschen Satz aus (2) abzuleiten ist, der, für dielektrische Medien gültige, Gleichungensatz

$$(2')\qquad \begin{cases} A\varepsilon\,V\,W\dfrac{\partial \mathfrak{E}_u}{\partial t} = \dfrac{\partial (V\mathfrak{M}_v)}{\partial w} - \dfrac{\partial (W\mathfrak{M}_w)}{\partial v}\,, \\ A\varepsilon\,W\,U\dfrac{\partial \mathfrak{E}_v}{\partial t} = \dfrac{\partial (W\mathfrak{M}_w)}{\partial u} - \dfrac{\partial (U\mathfrak{M}_u)}{\partial w}\,, \\ A\varepsilon\,U\,V\dfrac{\partial \mathfrak{E}_w}{\partial t} = \dfrac{\partial (U\mathfrak{M}_u)}{\partial v} - \dfrac{\partial (V\mathfrak{M}_v)}{\partial u} \end{cases}$$

erhalten.

§ 9. Wir stellen jetzt ein System von zylindrischen Koordinaten $\varrho\cdot\theta\cdot z$ dar. Dann ist

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2 + dz^2\,,$$

also:

$$U = 1\,,\quad V = \varrho\,,\quad W = 1$$

und daher

$$\begin{cases} A\mu\varrho\dfrac{\partial \mathfrak{M}_\varrho}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial (\varrho\mathfrak{E}_\theta)}{\partial z}\,, \\ A\mu\cdot\dfrac{\partial \mathfrak{M}_\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varrho}\,, \\ A\mu\varrho\dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial t} = \dfrac{\partial (\varrho\mathfrak{E}_\theta)}{\partial \varrho} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial \theta}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\varepsilon\varrho\dfrac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial t} = \dfrac{\partial (\varrho\mathfrak{M}_\theta)}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial \theta}\,, \\ A\varepsilon\cdot\dfrac{\partial \mathfrak{E}_\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial \varrho} - \dfrac{\partial \mathfrak{M}_\varrho}{\partial z}\,, \\ A\varepsilon\varrho\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{M}_\varrho}{\partial \theta} - \dfrac{\partial (\varrho\mathfrak{M}_\theta)}{\partial \varrho}\,. \end{cases}$$

Der Einfacheit halber, nehmen wir noch an, es sei unser Feld ein Umdrehungsfeld, also von der zweiten Koordinate unabhängig. Dann wird

$$(1'')\qquad \begin{cases} A\varrho\,\dfrac{\partial \mathfrak{M}_\varrho}{\partial t} = -\dfrac{\partial(\varrho\,\mathfrak{E}_\theta)}{\partial z}, \\ A\cdot\dfrac{\partial \mathfrak{M}_\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varrho}, \\ A\varrho\,\dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial t} = \dfrac{\partial(\varrho\,\mathfrak{E}_\theta)}{\partial \varrho}, \end{cases}$$

$$(2'')\qquad \begin{cases} A\varrho\,\dfrac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial t} = \dfrac{\partial(\varrho\,\mathfrak{M}_\theta)}{\partial z}, \\ A\cdot\dfrac{\partial \mathfrak{E}_\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial \varrho} - \dfrac{\partial \mathfrak{M}_\varrho}{\partial z}, \\ A\varrho\,\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial(\varrho\,\mathfrak{M}_\theta)}{\partial \varrho}, \end{cases}$$

wo noch die für die Luft charakteristischen Werte $\varepsilon = \mu = 1$ eingeführt worden sind.

Zur Integration der letzten Gleichungen dient nun folgender Satz, welcher von H. Hertz herrührt:

„Ist Π eine Funktion von ϱ, z und t, welche der partiellen Differentialgleichung

$$(a)\qquad A^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \Delta\Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}$$

genügt, und setzt man

$$\Sigma = \varrho\,\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho},$$

$$(b)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_\varrho = 0 \\ \varrho\,\mathfrak{M}_\theta = -A\dfrac{\partial\Sigma}{\partial t} \\ \mathfrak{M}_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varrho\,\mathfrak{E}_\varrho = -\dfrac{\partial\Sigma}{\partial z} \\ \mathfrak{E}_\theta = 0 \\ \varrho\,\mathfrak{E}_z = \dfrac{\partial\Sigma}{\partial\varrho} \end{cases},$$

so stellt dieses System eine Lösung der Gleichungen (1″) und (2″) dar.“

Beim Einsetzen der Werte (b) wird nämlich

$$A\varrho\,\frac{\partial \mathfrak{M}_\varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho\,\mathfrak{E}_\theta)}{\partial z} = 0,$$

$$A\cdot\frac{\partial \mathfrak{M}_\theta}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial\varrho} = -\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(A^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} - \Delta\Pi\right) = 0,$$

$$A\varrho\,\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial t} - \frac{\partial(\varrho\,\mathfrak{E}_\theta)}{\partial\varrho} = 0,$$

$$A\varrho\frac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial t}-\frac{\partial(\varrho\,\mathfrak{M}_\theta)}{\partial z}=-A\frac{\partial^3 \Pi}{\partial\varrho\,\partial z\,\partial t}+A\frac{\partial^3\Pi}{\partial\varrho\,\partial z\,\partial t}=0,$$

$$A\cdot\frac{\partial \mathfrak{E}_\theta}{\partial t}-\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial\varrho}+\frac{\partial \mathfrak{M}_\varrho}{\partial z}=0,$$

$$A\varrho\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho\,\mathfrak{M}_\theta)}{\partial\varrho}=A\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right)-A\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right)=0,$$

was zu beweisen war.

§ 10. Um einen besonderen Fall zu berechnen setze man nun

$$\Pi=Q\,l\frac{\cos(m\,r-\mathfrak{n}\,t)}{r},\tag{c}$$

$$r=\sqrt{\varrho^2+z^2}.$$

Es wird nach einfachen Rechnungen

$$A^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}=-A^2\,Q\,l\,\mathfrak{n}^2\frac{\cos(m\,r-\mathfrak{n}\,t)}{r},$$

$$\Delta\,\Pi=-\,Q\,l\,m^2\frac{\cos(m\,r-\mathfrak{n}\,t)}{r},$$

die Funktion Π genügt also der Gleichung (a) wenn

$$A^2\,\mathfrak{n}^2=m^2,$$

also:

$$\frac{\mathfrak{n}}{m}=\frac{1}{A}$$

ist. Hiernach stellt die betrachtete Lösung eine Schar von Kugelwellen dar, welche vom Nullpunkt der Koordinaten ausgehend, sich in die Ferne hin mit der Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

In der Umgegend vom Punkte $r=0$ darf man, annäherungsweise

$$\Pi=Q\,l\frac{\cos\mathfrak{n}\,t}{r}$$

schreiben.

Nun ist aber

$$X=\mathfrak{E}_\varrho\frac{x}{\varrho}=\mathfrak{E}_\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial x}=-\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z}\frac{\partial\varrho}{\partial x}=-\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial z},$$

$$Y=\mathfrak{E}_\varrho\frac{y}{\varrho}=\mathfrak{E}_\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial y}=-\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varrho\,\partial z}\frac{\partial\varrho}{\partial y}=-\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z},$$

$$Z=\mathfrak{E}_z=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho}\right)=-\frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial z},$$

wird daher

$$\varphi=\frac{\partial\Pi}{\partial z}$$

gesetzt, so erhält man

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

die Funktion φ, d. h. in unserem Falle

$$Q l \cos \mathfrak{n} t \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x},$$

stellt also das elektrische Potential dar.

Für kleine Werte des r ist übrigens die magnetische Kraft

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\theta = -\frac{A}{\varrho}\frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= -A\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varrho\, \partial t}, \\ &= -AQl\frac{\partial^2}{\partial \varrho\, \partial t}\frac{\cos \mathfrak{n} t}{r}, \\ &= -\frac{AQl\mathfrak{n}}{r^2}\sin \mathfrak{n} t \frac{\partial r}{\partial \varrho}, \\ &= -\frac{AQl\mathfrak{n}}{r^2}\sin \mathfrak{n} t \sin(r, z). \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für φ und $\mathfrak{M}$ stimmen nun mit denjenigen, welche früher (§ 6 u. § 7) abgeleitet wurden vortrefflich überein. Es stellt also die Lösung

$$\Pi = Q l \frac{\cos(m r - \mathfrak{n} t)}{r}$$

das Feld dar, das der Leiter der Fig. 31 um sich erregt. Es ist jetzt interessant, dieses Feld für entfernte Punkte zu studieren; und dazu muß man die Funktion Σ berechnen.

Es wird

$$\begin{aligned} \Sigma = \quad & Q l \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{\cos(m r - \mathfrak{n} t)}{r}, \\ = & -Q l \varrho \left[m\frac{\sin(m r - \mathfrak{n} t)}{r}\frac{\partial r}{\partial \varrho} + \frac{\cos(m r - \mathfrak{n} t)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \varrho}\right], \\ = & -Qlm\left[\sin(m r - \mathfrak{n} t) + \frac{\cos(m r - \mathfrak{n} t)}{r}\right]\sin^2(r, z) \end{aligned}$$

und, für vom Nullpunkt des Koordinatensystems, also vom schwingenden Leiter sehr entfernte Punkte, annäherungsweise

$$\Sigma = -Qlm\sin(m r - \mathfrak{n} t)\sin^2(r, z).$$

Hieraus folgt nun

$$\mathfrak{E}_\varrho = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = +\frac{Qlm^2}{\varrho}\cos(m r - \mathfrak{n} t)\sin^2(r, z)\cos(r, z),$$

$$\mathfrak{E}_z = +\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \Sigma}{\partial \varrho} = -\frac{Qlm^2}{\varrho}\cos(m r - \mathfrak{n} t)\sin^3(r, z)$$

und daher

$$\mathfrak{E}_\varrho \sin(r,z) + \mathfrak{E}_z \cos(r,z) = 0,$$

es steht also die elektrische Kraft auf der Richtung von r (der Fortpflanzungsrichtung) senkrecht.

Dasselbe gilt natürlich auch für die magnetische Kraft, welche die einzige Komponente $\mathfrak{M}_\vartheta$ besitzt.

Dabei stehen elektrische und magnetische Kraft aufeinander senkrecht, indem die eine in die Meridianebene fällt, während die andere normal dazu wirkt.

Der schwingende Leiter, den wir betrachtet haben, sendet also polarisierte Strahlen elektrischer bzw. magnetischer Kraft aus, woraus die Möglichkeit erhellt, eine Theorie der Emission des Lichtes aufzubauen, die die Körpermoleküle als Leiter bzw. als Systeme von Leitern darstellt.

Es wird sich zeigen lassen, daß ein derartiges Bild auch in numerischer Hinsicht gute Dienste zu leisten vermag.

§ 11. Um diesen Beweis zu liefern, berechnen wir die Energie, welche von unserem Leiter während einer halben Schwingung ausgestrahlt wird. Die Rechnung führt man am besten aus, indem man vom sogenannten Poyntingschen Lehrsatz ausgeht.

Man multipliziere die Gleichungen (1) und (2) der Reihe nach mit L, M, N, X, Y, Z und addiere sie.

Es wird

$$A\mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+\ldots\right)+A\varepsilon\left(X\frac{\partial X}{\partial t}+\ldots\right)+4\pi A\lambda(X^2+\ldots)$$
$$=L\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+\ldots+X\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)+\ldots,$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(NY-MZ)+\frac{\partial}{\partial y}(LZ-NX)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(MX-LY),$$

also durch Raumintegration

$$\tfrac{1}{2}A\frac{\partial}{\partial t}\int\mu(L^2+\ldots)\,d\tau+\tfrac{1}{2}A\frac{\partial}{\partial t}\int\varepsilon(X^2+\ldots)\,d\tau$$
$$+4\pi A\int\lambda(X^2+\ldots)\,d\tau$$
$$=\int\left[\frac{\partial}{\partial x}(NY-MZ)+\ldots\right]d\tau,$$
$$=\int[(NY-MZ)\cos(n,x)+(LZ-NX)\cos(n,y)$$
$$+(MX-LY)\cos(n,z)]\,d\sigma,$$

wo mit n die äußere Normale zur Fläche σ, welche den Raum τ umfaßt, gemeint ist.

Setzen wir nun

$$X = \mathfrak{E}\, e_1, \qquad Y = \mathfrak{E}\, e_2, \qquad Z = \mathfrak{E}\, e_3,$$
$$L = \mathfrak{M}\, m_1, \qquad M = \mathfrak{M}\, m_2, \qquad N = \mathfrak{M}\, m_3,$$

und beachten, daß, wenn mit p die Normale zur $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$-Ebene bezeichnet wird,

$$\frac{m_2 e_3 - m_3 e_2}{\sin(\mathfrak{M}, \mathfrak{E})} = \cos(p, x), \quad \ldots$$

ist, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2} A \frac{\partial}{\partial t} \int \mu (L^2 + \ldots) d\tau + \tfrac{1}{2} A \frac{\partial}{\partial t} \int \varepsilon (X^2 + \ldots) d\tau + 4\pi A \int \lambda (X^2 + \ldots) d\tau$$
$$= - \int \mathfrak{E}\, \mathfrak{M} \sin(\mathfrak{M}, \mathfrak{E}) [\cos(p, x) \cos(n, x) + \ldots] d\sigma,$$

d. h.

$$\frac{\partial}{\partial t}(T + U) = - 2V - \int \frac{\mathfrak{E}\, \mathfrak{M} \sin(\mathfrak{M}, \mathfrak{E})}{4\pi A} \cos(p, n)\, d\sigma.$$

Die Energie, welche im Raume τ enthalten ist, nimmt also fortwährend ab, indem (Joulesche) Wärme entsteht, und dabei durch die Fläche σ eine Strahlung, nach der Richtung p mit der Geschwindigkeit $\frac{\mathfrak{E}\, \mathfrak{M} \sin(\mathfrak{M}, \mathfrak{E})}{4\pi A}$, stattfindet.

Dies ist aber der Poyntingsche Lehrsatz.

Sind die Widerstände zu vernachlässigen, so hat man offenbar $V = 0$ zu setzen, also:

$$\frac{\partial}{\partial t}(T + U) = - \int \frac{\mathfrak{E}\, \mathfrak{M} \sin(\mathfrak{M}, \mathfrak{E})}{4\pi A} \cos(p, n)\, d\sigma.$$

§ 12. Wir kehren jetzt zur Betrachtung des Hertzschen Erregers zurück, und führen die Integration für eine sehr große Kugelfläche aus, deren Mittelpunkt mit dem Nullpunkt der Koordinaten zusammenfällt.

Es ist

$$\mathfrak{E} = - \frac{Q l m^2}{r} \cos(m r - \mathfrak{n} t) \sin\psi, \qquad [\psi = (r, z)],$$

$$\mathfrak{M} = - \frac{A}{\varrho} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = + \frac{A Q l m}{\varrho} \frac{\partial}{\partial t} \sin(m r - \mathfrak{n} t) \sin^2(r, z),$$
$$= - \frac{A Q l m \mathfrak{n}}{r} \cos(m r - \mathfrak{n} t) \sin\psi,$$

also:

$$\mathfrak{E}\,\mathfrak{M} = \frac{A\,Q^2 l^2 m^3 \mathfrak{n}}{r^2} \cos^2(m r - \mathfrak{n} t) \sin^2 \psi ,$$

und

$$\sin(\mathfrak{M}, \mathfrak{E}) = 1 ;$$

für $d\sigma$ dürfen wir aber $2\pi r^2 \sin\psi\, d\psi$ schreiben. Die während einer halben Schwingung durch die ganze Kugelfläche ausgestrahlte Energie berechnet sich daher zu

$$\frac{Q^2 l^2 m^3 \mathfrak{n}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\mathfrak{n}}} d t \int_0^{\pi} d\psi \cos^2(m r - \mathfrak{n} t) \sin^3 \psi$$

$$= \frac{Q^2 l^2 m^3 \mathfrak{n}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\mathfrak{n}}} d t \cos^2(m r - \mathfrak{n} t) \int_0^{\pi} d\psi \sin^3 \psi ,$$

$$= \frac{2\,Q^2 l^2 m^3 \mathfrak{n}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{\mathfrak{n}}} d t \cos^2(m r - \mathfrak{n} t) ,$$

$$= \frac{Q^2 l^2 m^3 \pi}{3} ;$$

führt man noch die Wellenlänge Λ ein, der Beziehung $\Lambda = \frac{2\pi}{m}$ gemäß, so wird endlich

$$\frac{8\,Q^2 l^2 \pi^4}{3\,\Lambda^3} ,$$

als Maß der ausgestrahlten Energie erhalten.

§ 13. Betrachten wir nun den Lichtprozeß als eine elektromagnetische Erscheinung, so müssen wir annehmen, daß die Ladungen, welche durch ihre Schwingungen die Emission des Lichtes bedingen, dieselben sind, die durch die Elektrolyse zum Vorschein kommen. Es ist aber erfahrungsgemäß jedes Atom bei elektrolytischen Phänomenen mit einem Elektrizitätsquantum versehen, das von Richarz zu $12{,}9 . 10^{-11}$, durch Stoney zu $3 . 10^{-11}$ elektrostatische C.G.S.-Einheiten berechnet wurde.

Übrigens können wir die Strahlung einer Flamme direkt bestimmen, während die kinetische Gastheorie uns Mittel liefert, die Zahl der Moleküle, welche in der Flamme vorkommen, sowie ihre Größe (etwa die Länge l) zu berechnen. Aus photo-

metrischen Bestimmungen ist es daher möglich, durch die eben aufgestellte Formel, das elektrische Quantum Q abzuleiten.

E. Wiedemann hat nun gezeigt, daß die während der Zeit dt von einer glühenden Gasmasse ausgestrahlte Energie durch eine Funktion der Form $Ee^{-at}dt$ zu berechnen ist.

Das gesamte Energiequantum, das die Gasmasse auszustrahlen vermag, wird damit zu

$$\int_0^\infty Ee^{-at}dt = \frac{E}{a};$$

es ist aber möglich, für bestimmte Fälle E ebenso wie a zu berechnen. Für das Natrium findet man z. B. $a = 10^2$, und für ein Gramm Natriumdampf $(E/a) = 1{,}34 \cdot 10^9$ also $E = 1{,}34 \cdot 10^{11}$ $(C^2 \cdot G \cdot S^{-3})$.

Was die physikalische Bedeutung der Größe E betrifft, so ist es einleuchtend, daß E das Energiequantum angibt, welches die betrachtete Gasmasse in einer Sekunde ausstrahlen würde, falls die Strahlung während dieser ganzen Zeit die Anfangsintensität behielte.

Nun strahlt aber unser Leiter während der ersten halben Schwingung die Energie $8\,Q^2 l^2 \pi^4/3\,\Lambda^3$ aus; ein System von n Molekülen würde also, während der Zeiteinheit, die Energie

$$n \cdot \frac{8\,Q^2 l^2 \pi^4}{3\,\Lambda^3} \cdot \frac{2}{\Lambda\,\Lambda} = \frac{16\,n\,Q^2 l^2 \pi^4}{3\,\Lambda^4} \cdot \frac{1}{\Lambda} = E$$

ausstrahlen.

Für ein Gramm Natriumdampf ist aber $n = 6 \cdot 10^{20}$, und für das Natriummolekül $l = 10^{-8}$, $\Lambda = 6 \cdot 10^{-5}$, also:

$$\frac{16 \cdot 6 \cdot 10^{20} \cdot Q^2 \cdot 10^{-16} \cdot \pi^4 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 1296 \cdot 10^{-20}} = 1{,}34 \cdot 10^{11},$$

d. h.

$$Q^2 = \frac{1{,}34 \cdot 3 \cdot 1296 \cdot 10^{-9}}{16 \cdot 6 \cdot \pi^4 \cdot 3 \cdot 10^{14}},$$

$$= 0{,}019 \cdot 10^{-22},$$

und endlich

$$Q = 0{,}14 \cdot 10^{-11}.$$

Diese Zahl ist ziemlich viel kleiner als die Werte, welche früher angegeben wurden, zeigt aber immerhin dieselbe Größenordnung. Übrigens war vom Anfang an klar, daß aus unserer Rechnung eine zu kleine Ladung sich ergeben mußte;

denn die Zahl, die wir für l in die Formel eingesetzt haben, stellt ja, nach der kinetischen Gastheorie eher die Wirkungssphäre als den eigentlichen Durchmesser der Gasmoleküle dar.[1])

Damit kann die Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung als eine recht genügende betrachtet werden.

Neunte Vorlesung.

Zahlenmäßige Berechnung molekularer Gebilde.

§ 1. Einführendes. — § 2. Selbstinduktionskoeffizient eines geradlinigen Drahtes mit kreisförmigem Querschnitt. — § 3. Kapazität einer elliptischen Scheibe. — § 4—5. Numerische Rechnungen.

§ 1. Um die Resultate zu erläutern, welche in der vorigen Vorlesung abgeleitet wurden, gehen wir jetzt zur zahlenmäßigen Berechnung eines bestimmten elektrischen Leiters. Wir nehmen an, daß der Draht die Länge l und den Durchmesser d hat; die Kapazitäten sollen kreisförmige Blechscheiben mit dem Radius a sein. Das Gebilde sieht also etwa der Fig. 32 entsprechend aus. Bevor wir zur Berechnung der elektrischen Konstanten schreiten, ist zu bemerken, daß die Formel

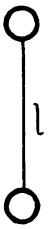


Fig. 32.

$$n = \sqrt{\frac{2}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

(VIII. Vorl. § 5) unmittelbar die Schwingungsperiode

$$T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

liefert; ist nun R gegen L als eine kleine Größe zu betrachten, so wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{CL}{2}}.$$

Wir können uns also mit der Ermittelung der Zahlenwerte für C und L begnügen; dabei ist (VIII. Vorl. § 2 und 3)

$$\begin{cases} L i^2 = A^2 \int (Ff + Gg + Hh)\, d\tau, \\ C = \frac{q}{\varphi}. \end{cases}$$

[1]) Die Berechnung des letzten Paragraphen rührt von H. Ebert her.

Setzt man daher $L = \Lambda^2 \mathfrak{L}$, so wird $\mathfrak{L} i^2 = \int (Ff + Gg + Hh)\, d\tau$, und $T = 2\pi \Lambda \sqrt{C\mathfrak{L}/2}$, d. h.

$$T\frac{1}{\Lambda} = 2\pi \sqrt{\frac{C\mathfrak{L}}{2}};$$

beachten wir aber, daß $1/\Lambda$ die Geschwindigkeit der elektrischen Wellen im freien Äther darstellt (VIII. Vorl. § 10), so wird noch

$$\Lambda = 2\pi \sqrt{\frac{C\mathfrak{L}}{2}}, \tag{1}$$

wenn mit Λ, wie vorher, die Wellenlänge im Vakuum bezeichnet wird.

§ 2. Wie in der vorigen Vorlesung soll jetzt angenommen werden, daß der Draht zur z-Achse parallel liegt, womit man ganz einfach bekommt

$$\mathfrak{L} i^2 = \int H h\, d\tau, \qquad H = \int \frac{h'}{r}\, d\tau'.$$

Ist nun Δ der Abstand zwischen (x, y, z) und der Geraden, welche durch (x', y', z') der z-Achse parallel läuft, so wird $r = \sqrt{\Delta^2 + (z' - z)^2}$; und dann, der Reihe nach

$$H = \int \frac{h'}{r}\, d\tau' = \int_\sigma h'\, d\sigma' \int_0^l \frac{dz'}{r} = \int_\sigma h'\, d\sigma' \int_0^l \frac{dz'}{\sqrt{\Delta^2 + (z' - z)^2}},$$

$$= \int_\sigma h'\, d\sigma' \left\{ \log \left[z' - z + \sqrt{\Delta^2 + (z' - z)^2} \right] \right\}_0^l,$$

$$= \int_\sigma h'\, d\sigma' \log \frac{l - z + \sqrt{\Delta^2 + (l - z)^2}}{\sqrt{\Delta^2 + z^2} - z}.$$

Jetzt wollen wir annehmen, daß der Draht sehr dünn ist, und zwar so dünn, daß man Δ^2 gegen z^2 und $(l - z)^2$ vernachlässigen darf; dann erhält man

$$H = \int_\sigma h'\, d\sigma' \log \frac{4(z\, l - z^2)}{\Delta^2}.$$

Dies ist aber ein sogenanntes logarithmisches Potential, das Potential also eines Stoffes, der in der Ebene Wirkungen ausübt, welche mit dem Abstand umgekehrt proportional sind.

Es kommen einem solchen Potentiale in der Ebene viele Eigenschaften zu, die das gewöhnliche (Newtonsche) Potential im Raume besitzt. Es übt z. B. ein kreisförmiger Ring dieselbe Wirkung aus als ob die ganze Materie im Mittelpunkt zusammengedrängt wäre.

Für die Punkte, welche auf der Mantelfläche des Drahtes liegen, darf man also

$$H = \int_\sigma h' \, d\sigma' \log \frac{16\,(\varkappa\, l - \varkappa^2)}{d^2}$$

schreiben.

Es ist jetzt zu beachten, daß erfahrungsgemäß die schnellschwingenden Ströme in den ganzen Querschnitt des Drahtes gar nicht eindringen, sondern auf der Oberfläche beschränkt bleiben; vom diesem Ergebnisse machen wir Gebrauch, indem wir ohne weiteres

$$H = \int_\sigma h' \, d\sigma' \log \frac{16\,(\varkappa\, l - \varkappa^2)}{d^2}$$

für jeden Punkt setzen. Für das Innere ist nun nicht mehr $\log 4\,(z\,l - z^2)/\Delta^2$ durch $\log 16\,(z\,l - z^2)/d^2$ zu ersetzen, wohl aber ist mit großer Annäherung $h' = 0$; und damit erhält auch das Integral beinahe seinen richtigen Wert.

Es wird also

$$H = \log \frac{16\,(\varkappa\, l - \varkappa^2)}{d^2} \int_\sigma h' \, d\sigma' = i \log \frac{16\,(\varkappa\, l - \varkappa^2)}{d^2},$$

und daher

$$\mathfrak{L}\, i^2 = i \int h \, d\tau \log \frac{16\,(\varkappa\, l - \varkappa^2)}{d^2},$$

$$= i \int_\sigma h \, d\sigma \int_0^l \log \frac{16\,(\varkappa\, l - \varkappa^2)}{d^2} \, dz = i^2 \int_0^l \log \frac{16\,(\varkappa\, l - \varkappa^2)}{d^2} \, dz,$$

$$= i^2 \cdot 2\, l \left(\log \frac{4\, l}{d} - 1 \right);$$

d. h.

$$\mathfrak{L} = 2\, l \left(\log \frac{4\, l}{d} - 1 \right). \tag{2}$$

§ 3. Jetzt gehen wir zur Berechnung der Kapazität für eine kreisförmige Scheibe. Es ist ganz bekannt, daß eine elektrische Kugelschale keine Wirkungen auf innere Punkte ausübt; daraus folgt aber unmittelbar, daß eine Schale, welche von zwei homothetischen Ellipsoiden begrenzt ist, keine Wir-

kungen wieder ausüben kann. Denken wir uns also, daß ein Ellipsoid elektrisiert sei, und nehmen die oberflächliche Dichtigkeit (η) der Elektrizität als in jedem Punkte der Dicke proportional, die eben in jenem Punkte einer Schale zukommt, welche von dem geladenen Ellipsoid und einem anderen, das ihm homothetisch ist, begrenzt wird, so müssen wir die Ladung als im Gleichgewicht befindlich betrachten. Sie übt im Inneren gar keine Wirkung aus, und damit hat das Potential im ganzen Leiter überall denselben Wert. Nun ist es leicht zu zeigen, daß es für eine gegebene Ladung auf einem bestimmten Leiter nur eine einzige Gleichgewichtslage gibt. Die geschilderte Verteilung ist also die einzige, die mit den Bedingungen verträglich ist.

Um den angegebenen Satz zu beweisen, nehmen wir an, daß zwei verschiedene Verteilungen möglich sind. Man bezeichne für die erste Verteilung die Oberflächendichtigkeit mit η, mit φ_0 das Potential auf dem Leiter, mit φ das Potential im äußeren Raume; und es seien dabei mit η', φ'_0, φ' die entsprechenden Größen für die zweite Verteilung dargestellt.

Es ist nun

$$\int (\eta - \eta')\, d\sigma = 0,$$

und dabei, wie leicht zu ersehen,

$$\eta = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n}, \qquad \eta' = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \varphi'}{\partial n},$$

wo mit n die äußere Normale zur leitenden Oberfläche bezeichnet wurde.

Hieraus folgt aber

$$-\frac{\varepsilon}{4\pi}\int (\varphi - \varphi')\frac{\partial(\varphi - \varphi')}{\partial n}\, d\sigma = \int (\varphi - \varphi')(\eta - \eta')\, d\sigma,$$

$$= (\varphi_0 - \varphi'_0)\int (\eta - \eta')\, d\sigma = 0$$

und, nach dem Greenschen Lehrsatz (IV. Vorl. § 9)

$$\int \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \varphi')\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi - \varphi')\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi - \varphi')\right]^2 + (\varphi - \varphi')\,\Delta(\varphi - \varphi') \right\} d\tau = \int (\varphi - \varphi')\frac{\partial}{\partial n}(\varphi - \varphi')\, d\sigma = 0.$$

Bemerkt man aber, daß $\Delta(\varphi - \varphi') = 0$,[1]) so wird gleich

$$\int \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \varphi')\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi - \varphi')\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi - \varphi')\right]^2 \right\} d\tau = 0,$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \varphi') = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi - \varphi') = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi - \varphi') = 0,$$

$$\varphi - \varphi' = \text{Konst.}$$

und endlich

$$\eta = \eta'.$$

Dies vorausgeschickt betrachten wir zwei homothetische Ellipsoide mit den Halbachsen a, b, c bzw. $a(1+\varepsilon)$, $b(1+\varepsilon)$, $c(1+\varepsilon)$, wo ε eine sehr kleine Größe bedeutet.

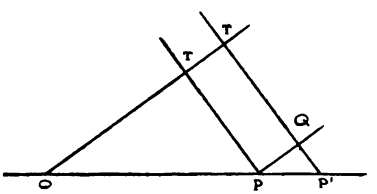


Fig. 33.

Vom gemeinsamen Mittelpunkt der Ellipsoide (O) ziehe man eine Gerade; sie schneide dabei die Oberflächen in P und P' (Fig. 33). Wir stellen noch mit PT bzw. $P'T'$ die Tangentialebenen in P und P' dar, und ziehen die Geraden OT, PQ senkrecht zu den genannten Ebenen.

Man setze $OT = p$, $PQ = \eta$; dann wird

$$\frac{PP'}{\eta} = \frac{OP}{p},$$

also:

$$\frac{OP \cdot \varepsilon}{\eta} = \frac{OP}{p},$$

d. h.

$$(*) \qquad \varepsilon = \frac{\eta}{p}.$$

Die ganze Ladung, die auf der Oberfläche des inneren Ellipsoids sitzt (q), ist nun durch

$$(**) \qquad q = \frac{4}{3}\pi abc(1+3\varepsilon) - \frac{4}{3}\pi abc = 4\pi abc\varepsilon$$

zu berechnen.

Jetzt wollen wir die Halbachse c zu Null werden lassen, womit offenbar das Ellipsoid sich zu einer elliptischen Scheibe umformt.

---

[1]) Man vergleiche darüber die folgende Vorlesung (§ 2).

Bezeichnet man mit x, y, z die Koordinaten von P, so ist

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

und daher

$$\frac{p}{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\frac{c^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\frac{c^2}{b^2} + 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) + 1}},$$

also:

$$\operatorname*{Lim}_{c=0} \frac{p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Ist die Scheibe eine kreisförmige, so hat man ganz einfach $a = b$ zu setzen; was

$$\eta = \frac{q}{4\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} = \frac{q}{4\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2 - \Delta^2}}$$

liefert.

Für den Mittelpunkt der Scheibe wird jetzt, als Maß des Potentials

$$\varphi = 2\frac{q}{4\pi a}\int_0^a \frac{2\pi \Delta\, d\Delta}{\Delta\sqrt{a^2 - \Delta^2}} = q\frac{\pi}{2a},$$

woraus

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{2a}{\pi} \tag{3}$$

sich ableiten läßt.

§ 4. Von diesen Resultaten machen wir Gebrauch, indem wir die Schwingungsperiode der Resonatoren berechnen, welche, wie in der zweiten Vorlesung (§ 2) angegeben, vom Verfasser zur Nachbildung der Oberflächenfarbe angewendet wurden.

Wir setzen also

$$d = 0{,}14, \qquad l = 20, \qquad a = 1{,}9,$$

woraus sich ergibt

$$\operatorname{Log} \mathfrak{L} = 2{,}330\ 4138, \qquad \operatorname{Log} C = 0{,}082\ 6337,$$
$$\mathfrak{L} = 214{,}00 \text{ cm}, \qquad C = 1{,}21 \text{ cm},$$

und daher

$$\text{Log}\,\Lambda = 1{,}854\ 1886,$$
$$\Lambda = 71{,}48\ \text{cm}.$$

§ 5. Jetzt können wir uns fragen, wie groß ein Leiter sein muß, wenn er eine Wellenlänge Λ' aussenden, und dabei dem eben betrachteten Leiter ähnlich sein soll. Offenbar hat man nur

$$d' = d\frac{\Lambda'}{\Lambda}, \qquad l' = l\frac{\Lambda'}{\Lambda}, \qquad a' = a\frac{\Lambda'}{\Lambda}$$

zu setzen. Ist z. B. $\Lambda' = 6 \cdot 10^{-5}$, was, wie bemerkt (VIII. Vorl. § 13), annäherungsweise den Natriumlinien entspricht, so wird

$$\text{Log}\,\Lambda' = 0{,}778\ 1513 - 5, \qquad \text{Log}\frac{\Lambda'}{\Lambda} = 0{,}923\ 9627 - 7,$$

also:

$$\text{Log}\,d' = 0{,}070\ 0907 - 7, \qquad \text{Log}\,l' = 2{,}224\ 9927 - 7,$$
$$d' = 1{,}18 \cdot 10^{-7}, \qquad l' = 167{,}88 \cdot 10^{-7},$$
$$= 1{,}68 \cdot 10^{-5},$$

$$\text{Log}\,a' = 1{,}202\ 7163 - 7,$$
$$a' = 15{,}95 \cdot 10^{-7}.$$

Beachten wir nun, daß erfahrungsgemäß für die Natriummoleküle l' etwa 10^{-8} betragen muß, so haben wir hieraus zu schließen, daß diese Moleküle mit dem Leiter des vorigen Paragraphen keine Ähnlichkeit haben können. Um ein zweckmäßiges Bild zu erhalten, würde man dagegen annehmen müssen, daß der Draht sehr viel dünner ist, als wir früher angenommen. Den äußerst dünnen Draht darf man wohl als einen Funken interpretieren.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, hat Galitzine vorgeschlagen, als Bilder für die materiellen Atome kreisförmige Leiter zu betrachten. Darauf wollen wir aber verzichten; denn eine solche Darstellung bietet keine prinzipiellen Vorteile und führt dabei in die Rechnung eine gewaltige Verwicklung ein.

Zehnte Vorlesung.

Leiter mit einem einzigen Freiheitsgrad: elektromagnetische Dispersionstheorie.

§ 1. Verschiebungsstrom. — § 2. Fortpflanzungsgleichungen. — § 3. Absorption in homogenen Leitern. — § 4. Fortpflanzungsgleichungen für ein Leitersystem. — § 5—7. Selektive Absorption. — § 8. Anomale Dispersion. — § 9. Normale Dispersion. —

§ 1. Die Gleichungen des elektrischen Stromes (VIII. Vorl. § 1, Gleichung 2) wollen wir in der Form

$$\begin{cases} 4\pi A\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}+f\right)=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}, \\ 4\pi A\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t}+g\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}, \\ 4\pi A\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t}+h\right)=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x} \end{cases}$$

schreiben, d. h. wenn die Definitionen

$$\mathfrak{f}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}, \qquad \mathfrak{g}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t}, \qquad \mathfrak{h}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t}$$

eingeführt werden:

$$\begin{cases} 4\pi A(f+\mathfrak{f})=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}, \\ 4\pi A(g+\mathfrak{g})=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}, \\ 4\pi A(h+\mathfrak{h})=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}. \end{cases}$$

Es zeigt dies, daß die Größen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ als Komponenten eines elektrischen Stromes (des sogenannten Verschiebungsstromes) aufgefaßt werden können.

§ 2. Deriviert man die Gleichungen (1) der achten Vorlesung nach den Koordinaten x, y, z und addiert sie, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0;$$

es muß also die Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0$$

immer bestehen, wenn ihr im Anfangszustand genügt wird.

Für Punkte, wo keine elektrischen Ladungen sich befinden, ist ebenfalls

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

zu setzen.

Dies nehmen wir an, und leiten aus

$$A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \text{ und } A\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}$$

durch Derivieren

$$A\mu \frac{\partial^2 L}{\partial t\, \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial y} \text{ und } A\mu \frac{\partial^2 M}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial^2 X}{\partial x\, \partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

ab, also:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial t\, \partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial t\, \partial x} &= \frac{1}{A\mu}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x\, \partial x} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial y}\right), \\
&= \frac{1}{A\mu}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x\, \partial x} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial x}\right), \\
&= \frac{1}{A\mu}\left[\Delta Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right], \\
&= \frac{1}{A\mu}\Delta Z.
\end{aligned}$$

Es ist aber, nach der dritten aus den Gleichungen (2) (VIII. Vorl. § 1)

$$A\varepsilon \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + 4\pi A\lambda \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial^2 L}{\partial t\, \partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial t\, \partial x},$$

und daher

$$A^2 \varepsilon\mu \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + 4\pi A^2 \lambda\mu \frac{\partial Z}{\partial t} = \Delta Z. \tag{1}$$

Dieser Gleichung wird nun, wie leicht zu ersehen, von den sechs Komponenten X, Y, Z, L, M, N genügt; wir nennen sie die Fortpflanzungsgleichung.

§ 3. Setzt man zur Integration

$$Z = \mathfrak{A}\, e^{ly - int}, \qquad l = -k + \frac{in}{c},$$

wie es in der sechsten Vorlesung geschehen ist, so erhält man

$$-A^2 \varepsilon\mu\, \mathfrak{n}^2 - 4\pi A^2 \lambda\mu\, \mathfrak{n}\, i = l^2, \tag{2}$$

oder, beim Einsetzen des Wertes von l

$$\begin{aligned}
-A^2 \varepsilon\mu\, \mathfrak{n}^2 - 4\pi A^2 \lambda\mu\, \mathfrak{n}\, i &= \left(-k + \frac{i\mathfrak{n}}{c}\right)^2, \\
&= k^2 - \frac{2k\mathfrak{n}\, i}{c} - \frac{\mathfrak{n}^2}{c^2},
\end{aligned}$$

und endlich, durch Trennen des reellen vom imaginären Teile

$$-A^2\varepsilon\mu\mathfrak{n}^2 = k^2 - \frac{\mathfrak{n}^2}{c^2}, \qquad 4\pi A^2\lambda\mu = \frac{2k}{c}.$$

Bei wirklichen materiellen Körpern ist k^2 gegen $\mathfrak{n}^2/c^2$ eine kleine Größe, um so mehr, da $\mathfrak{n}$ für schnelle Schwingungen, wie wir sie zu betrachten haben, einen beträchtlichen Wert annimmt.

Damit wird also

$$c = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad k = 2\pi A\lambda\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Es tritt daher in homogenen Leitern Absorption und doch keine merkliche Dispersion ein; die Absorption hängt aber hauptsächlich von der Leitfähigkeit ab. Dieses theoretische Resultat entspricht nun den Erfahrungsergebnissen, wenn wir uns auf die Betrachtung von langen Wellen beschränken (II. Vorl. § 1).

Ist das Medium ein dielektrisches, d. h. $\lambda = 0$, so wird ganz einfach, als Fortpflanzungsgleichung

$$A^2\varepsilon\mu\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z \tag{1'}$$

erhalten, und daher

$$-A^2\varepsilon\mu\mathfrak{n}^2 = l^2, \tag{2'}$$

$$c = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad k = 0.$$

In homogenen Isolatoren tritt also, nach unseren Formeln, keine Dispersion und keine Absorption ein; und dies ist wieder für die Fortpflanzung langer Wellen (Hertzscher Wellen) mit der Erfahrung in Einklang zu bringen.

§ 4. Betrachten wir dagegen sehr kurze elektromagnetische Wellen, bzw. Lichtwellen, so ist die Theorie zu ergänzen, wobei uns die Versuche, die wir in der zweiten Vorlesung beschrieben haben, ein für die Zerstreuung und Absorption des Lichtes passendes Modell liefern, das jetzt berechnet werden soll.

Wir denken uns also in ein dielektrisches homogenes Medium viele gleiche Leiter regelmäßig eingebettet, etwa nach dem Bilde des Leiters, der in der achten Vorlesung (§ 5 u. f.) zur Betrachtung kam. Der Einfachheit halber setzen wir noch voraus, daß die Leitungsdrähte, wie aus der Figur (Fig. 34) zu entnehmen, überall zur z-Achse parallel liegen.

Sind die Abstände zwischen naheliegenden Leitern nicht all-

zu klein, so schwingt jeder von ihnen so, als ob er ganz allein wäre, was in einer der nächsten Vorlesungen präzisiert werden wird. (Man vergleiche hierüber die XIII. Vorl.)

Für jeden Leiter hätten wir also die Lagrangesche Gleichung

$$\left(L D^2 + R D + \frac{2}{C}\right) q_a = 0$$

zu schreiben (VIII. Vorl. § 5). Setzen wir aber voraus, daß elektrische Wellen sich durch das Medium fortpflanzen, so sind

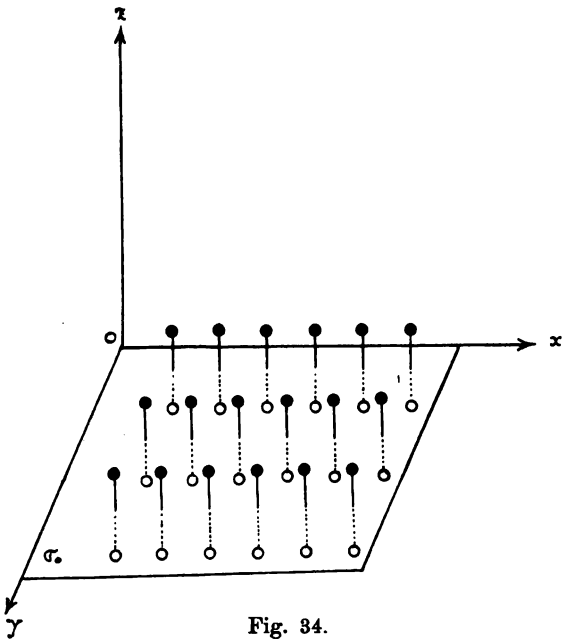


Fig. 34.

jene Systeme nicht mehr als freie im Sinne der Mechanik zu betrachten; denn es wird in den α-ten Leiter, durch die vorbeieilende elektrische Kraft Z, eine Wirkung induziert, welche wir uns mit Z einfach proportional denken, und in der Form $-K_\alpha Z/C$ schreiben wollen.

Wir erhalten daher

$$\left(L D^2 + R D + \frac{2}{C}\right) q_a = -\frac{K_a}{C} Z,$$

also auch

$$\left(L D^2 + R D + \frac{2}{C}\right) i_a = \frac{K_a}{C} Z. \tag{3}$$

Man lege jetzt eine zur xy-Ebene parallele Ebene σ_0, und nenne $\mathfrak{h}_0$ die Stromdichte im freien Medium, und $h_1 \cdot h_2 \ldots h_\alpha \ldots$ die Stromdichten (Stromkomponenten nach der z-Achse) in den von σ_0 getroffenen Leitern. Man bezeichne ferner mit σ den gemeinsamen Wert der Querschnitte, in welchen jeder Leiter von σ_0 geschnitten wird.

Dann ist die ganze durch σ_0 hindurchtretende Stromstärke

$$i = \mathfrak{h}_0 (\sigma_0 - \Sigma\sigma) + \sigma \Sigma h_\alpha,$$

d. h. die auf die Flächeneinheit reduzierte Stromdichte h (falls die Moleküle so wenig dicht liegen, daß die Summe ihrer Querschnitte gegen σ_0 zu vernachlässigen ist)

$$h = \mathfrak{h}_0 + \Sigma k_\alpha, \qquad \left(k_\alpha = \frac{\sigma}{\sigma_0} h_\alpha\right).$$

Für $\mathfrak{h}_0$ ist nun

$$\mathfrak{h}_0 = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \dot{Z},$$

wenn mit ε_0 die Dielektrizitätskonstante des freien dielektrischen Mediums bezeichnet wird; die k_α genügen offenbar einer der Gleichung (3) ganz ähnlichen Gleichung.

Aus (3) wird nämlich

$$(CLD^2 + CRD + 2)\sigma h_\alpha = K_\alpha \dot{Z},$$

$$(CLD^2 + CRD + 2) k_\alpha = \frac{K_\alpha}{\sigma_0} \dot{Z},$$

$$= \frac{\varepsilon_\alpha}{4\pi} \dot{Z}.$$

Demgemäß erhalten wir

$$k_\alpha = \frac{\frac{\varepsilon_\alpha}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 2} \dot{Z};$$

also:

$$h = \mathfrak{h}_0 + \Sigma k_\alpha,$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \frac{\Sigma \frac{\varepsilon_\alpha}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 2}\right) \dot{Z},$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \frac{\frac{E}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 2}\right) \dot{Z}.$$

Hier ist, wie leicht zu beweisen, E eine konstante, für das

betrachtete System charakteristische, und von der Fläche σ_0 durchaus unabhängige Größe.

Der Kürze halber setzen wir

$$CR = a, \qquad CL = b$$

und erhalten

$$h = \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \frac{\frac{E}{4\pi}}{2 + a D + b D^2} \right) \dot{Z},$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \frac{\frac{E}{4\pi}}{2 - a n i - b n^2} \right) \dot{Z},$$

$$= \frac{\varepsilon}{4\pi} \dot{Z},$$

mit

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{E}{2 - a n i - b n^2}. \tag{4}$$

Wir können daher unser Medium als ein gewöhnliches dielektrisches Medium, mit der Dielektrizitätskonstante ε betrachten. Bedenkt man übrigens, daß für schnelle Schwingungen die magnetische Konstante immer gleich Eins gesetzt werden darf, so wird, als Fortpflanzungsgleichung, aus (1')

$$A^2 \varepsilon \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z, \tag{1''}$$

also:

$$- A^2 \varepsilon n^2 = l^2. \tag{2''}$$

§ 5. Diese Gleichung haben wir jetzt zu entwickeln. Es wird

$$- \frac{l^2}{n^2} = A^2 \varepsilon,$$

d. h.

$$- \left(- \frac{k}{n} + \frac{i}{c} \right)^2 = - \frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2k}{cn} i = A^2 \left(\varepsilon_0 + \frac{E}{2 - a n i - b n^2} \right),$$

$$= A^2 \left[\varepsilon_0 + \frac{E(2 + a n i - b n^2}{(2 - b n^2)^2 + a^2 n^2} \right],$$

$$= A^2 \left[\varepsilon_0 + \frac{E(2 - b n^2)}{(2 - b n^2)^2 + a^2 n^2} \right] + A^2 E a n \frac{i}{(2 - b n^2)^2 + a^2 n^2},$$

und, beim Trennen des Reellen vom Imaginären

$$(5)\qquad \begin{cases} -\dfrac{k^2}{n^2}+\dfrac{1}{c^2}=A^2\left[\varepsilon_0+\dfrac{E(2-bn^2)}{(2-bn^2)^2+a^2n^2}\right], \\ \dfrac{2k}{cn}=A^2Ean\dfrac{1}{(2-bn^2)^2+a^2n^2}; \end{cases}$$

hieraus hat man also zu schließen, daß durch die Anwesenheit der Leiter sowohl Dispersion als Absorption der elektrischen Wellen verursacht wird, was mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt (II. Vorl. § 2 und 3).

§ 6. Die zweite aus den Gleichungen (5) liefert nun

$$\frac{k}{c}=\frac{A^2Ea}{2}\,\frac{n^2}{(2-bn^2)^2+a^2n^2},$$

und daher

$$\frac{\partial\left(\frac{k}{c}\right)}{\partial n}=\frac{A^2Ea}{2}\,\frac{2n[(2-bn^2)^2+a^2n^2]-n^2[-4bn(2-bn^2)+2a^2n]}{[(2-bn^2)^2+a^2n^2]^2},$$

$$=\frac{A^2Ea}{2}\,\frac{2n(2-bn^2)(2+bn^2)}{[(2-bn^2)^2+a^2n^2]^2}.$$

Ein Maximum (oder Minimum) der Absorption wird also eintreten, wenn entweder $n=0$, oder $n=\infty$, oder $2-bn^2=0$, oder noch $2+bn^2=0$ ist.

Unter den sechs Wurzeln, welche diesen Gleichungen genügen, nämlich

$$n=0,\quad n=\infty,\quad n=\pm\sqrt{\frac{2}{b}},\quad n=\pm i\sqrt{\frac{2}{b}}$$

haben bloß drei einen physikalischen Sinn, d. h. $n=0$, $n=\infty$, und $n=\sqrt{2/b}$.

Bedenken wir übrigens, daß, wenn mit T die Schwingungsperiode der hindurcheilenden elektromagnetischen Wellen bezeichnet wird, dann $n=2\pi/T$ ist, so erhält man der Reihe nach

$$T=\infty,\qquad T=0,\qquad \text{und } T=2\pi\sqrt{\frac{b}{2}}.$$

Die erste und zweite von diesen Gleichungen besagen nun, daß eine Welle von unendlich großer oder unendlich kleiner Periode keiner merklichen Absorption ausgesetzt ist; was wieder mit der Erfahrung sich deckt.

Die dritte Gleichung hat aber eine treffende Bedeutung. Es wurde in der neunten Vorlesung (§ 1) gezeigt, daß für die Leiter, die wir uns in das dielektrische Medium eingebettet

denken, annäherungsweise

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 = \sqrt{\frac{2}{CL}} = \sqrt{\frac{2}{b}}$$

ist.

Die Eigenperiode der einzelnen Leiter (T_0) ist daher nach der Formel

$$T_0 = \frac{2\pi}{\mathfrak{n}_0} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{2}}$$

darzustellen, und folglich

$$T = T_0 .$$

Es absorbieren also die eingebetteten Leiter die Wellen, die sie auszusenden vermögen; und damit wird die Theorie mit den Versuchsergebnissen in besten Einklang gebracht (II. Vorl. § 2 und 3).

§ 7. Eigentlich darf man bezweifeln, ob die Wurzel $\mathfrak{n} = \sqrt{2/b}$ einem Maximum entspricht; die Frage können wir aber durch folgende Überlegung entscheiden.

Aus

$$\frac{k}{c} = \frac{A^2 E a}{2} \cdot \frac{\mathfrak{n}^2}{(2 - b\mathfrak{n}^2)^2 + a^2\mathfrak{n}^2}$$

wird ja

$$\frac{k}{c} = \frac{A^2 E a}{2} \cdot \frac{1}{\frac{b^2}{\mathfrak{n}^2}\left(\frac{2}{b} - \mathfrak{n}^2\right)^2 + a^2},$$

also, für $\mathfrak{n} = \sqrt{2/b} \pm \varepsilon$:

$$\frac{k}{c} = \frac{A^2 E a}{2} \cdot \frac{1}{4b^2\varepsilon^2 + a^2},$$

demnach kleiner als für $\mathfrak{n} = \sqrt{2/b}$.

§ 8. Vernachlässigen wir in der ersten der Gleichungen (5) $k^2/\mathfrak{n}^2$ gegen $1/c^2$, so erhalten wir

$$\frac{1}{c^2} = A^2\left[\varepsilon_0 + \frac{E(2 - b\mathfrak{n}^2)}{(2 - b\mathfrak{n}^2)^2 + a^2\mathfrak{n}^2}\right],$$

d. h.

$$N^2 = \varepsilon_0 + \frac{E(2 - b\mathfrak{n}^2)}{(2 - b\mathfrak{n}^2)^2 + a^2\mathfrak{n}^2},$$

und, wenn man mit $\mathfrak{N}$ das Brechungsverhältnis für das Absorptionsmaximum bezeichnet

$$N^2 - \mathfrak{N}^2 = \frac{E(2 - b\mathfrak{n}^2)}{(2 - b\mathfrak{n}^2)^2 + a^2\mathfrak{n}^2}.$$

Beim Ableiten nach n wird hier

$$\frac{\partial(N^2-\mathfrak{N}^2)}{\partial n} = E\frac{\partial}{\partial n}\frac{2-bn^2}{(2-bn^2)^2+a^2n^2},$$

$$= E\frac{-2bn[(2-bn^2)^2+a^2n^2]-(2-bn^2)[-4bn(2-bn^2)+2a^2n]}{[(2-bn^2)^2+a^2n^2]^2},$$

$$= 2nE\frac{b(2-bn^2)^2-2a^2}{[(2-bn^2)^2+a^2n^2]^2};$$

der Bedingung $\partial(N^2-\mathfrak{N}^2)/\partial n = 0$ kann man also durch die vier Wurzeln

$$n=0, \quad n=\infty, \quad n^2=\frac{2}{b}\left(1\pm\frac{a}{\sqrt{2b}}\right)$$

genügen.

Die letzteren sind für uns von größerer Bedeutung; und es wäre leicht zu zeigen, daß die eine einem Minimum und die andere einem Maximum des Brechungsverhältnisses entspricht.

Wir begnügen uns damit, daß wir die Werte berechnen, die die Differenz $N^2-\mathfrak{N}^2$ für die genannten Wurzeln annimmt.

Man setze dazu

$$n=\sqrt{\frac{2}{b}}(1\pm\varepsilon),$$

also:

$$n^2=\frac{2}{b}(1\pm 2\varepsilon);$$

dann wird

$$2-bn^2=\mp 4\varepsilon,$$

und daher

$$N^2-\mathfrak{N}^2 = E\frac{\mp 4\varepsilon}{\frac{2a^2}{b}(1\pm 2\varepsilon)},$$

$$= \mp 2\frac{bE}{a^2}\varepsilon(1\mp 2\varepsilon),$$

$$= \mp 2\frac{bE}{a^2}\varepsilon,$$

$$N^2 = \mathfrak{N}^2 \mp 2\frac{bE}{a^2}\varepsilon.$$

Ist also die Frequenz ein wenig größer als im Absorptionsstreifen, so wird der Brechungskoeffizient kleiner wie $\mathfrak{N}$; ist die Frequenz dagegen kleiner als im Maximum der Absorption, so wird N größer wie $\mathfrak{N}$.

Diese Verhältnisse stimmen aber, wie wir in der sechsten Vorlesung bemerkt haben, mit den Erfahrungstatsachen ganz vorzüglich überein (man vergleiche die Fig. 1, I. Vorl.).

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

§ 9. Aus

$$N^2 = \varepsilon_0 + \frac{E(2 - b\,n^2)}{(2 - b\,n^2)^2 + a^2 n^2}$$

leitet man beim Einsetzen des Wertes n_0 (§ 6)

$$(*) \qquad N^2 = \varepsilon_0 + \frac{2E\left(1 - \frac{n^2}{n_0^2}\right)}{4\left(1 - \frac{n^2}{n_0^2}\right)^2 + a^2 n^2}$$

ab; ist nun n von n_0 erheblich verschieden, so dürfen wir im Nenner des zweiten Gliedes auf der rechten Seite $a^2 n^2$ gegen $4[1 - (n^2/n_0^2)]^2$ vernachlässigen, was

$$N^2 = \varepsilon_0 + \frac{E n_0^2}{2} \frac{1}{n_0^2 - n^2}$$

liefert. Hierbei wird aber

$$\frac{\partial N^2}{\partial n} = \frac{E n_0^2}{2} \frac{2n}{(n_0^2 - n^2)^2},$$

das Brechungsverhältnis nimmt also mit der Frequenz zu; und dies ist das wohlbekannte Gesetz, welchem die Körper ohne selektive Absorption (im Bereich des sichtbaren Spektrums) durchaus gehorchen.

Für $a = 0$, oder für vom Absorptionsmaximum entfernte Spektralgebiete, kommt aus (*)

$$N^2 = \varepsilon_0 + \frac{E}{2} \frac{1}{1 - \frac{n^2}{n_0^2}},$$

d. h.

$$N^2 = \varepsilon_0 - \frac{E n_0^2}{2n^2} \frac{1}{1 - \frac{n_0^2}{n^2}};$$

je nachdem $n_0 \gtrless n$ ist, dürfen wir also N^2 durch die erste oder die zweite dieser Gleichungen in eine Reihe entwickeln. Was entweder

$$N^2 = \varepsilon_0 + \frac{E}{2}\left(1 + \frac{n^2}{n_0^2} + \frac{n^4}{n_0^4} + \frac{n^6}{n_0^6} + \ldots\right),$$

oder

$$N^2 = \varepsilon_0 - \frac{E}{2} \frac{n_0^2}{n^2}\left(1 + \frac{n_0^2}{n^2} + \frac{n_0^4}{n^4} + \ldots\right)$$

liefert. Beim Einführen der Wellenlänge (Λ) wird daher

$$N^2 = \alpha' + \frac{b'}{\Lambda^2} + \frac{c'}{\Lambda^4} + \frac{d'}{\Lambda^6} + \ldots,$$

$$N^2 = \alpha' - \beta' \Lambda^2 - \gamma' \Lambda^4 - \delta' \Lambda^6 - \ldots,$$

also:

$$N = a + \frac{b}{\Lambda^2} + \frac{c}{\Lambda^4} + \frac{d}{\Lambda^6} + \cdots, \tag{6}$$

$$N = \alpha - \beta\Lambda^2 - \gamma\Lambda^4 - \delta\Lambda^6 + \ldots. \tag{7}$$

Formel (6) stimmt nun mit Cauchys Formel vollständig überein; Formel (7), die, bei Vernachlässigung der oberen Glieder passend

$$N = \alpha - \beta\Lambda^2 \tag{7'}$$

geschrieben werden kann, zeigt aber einen ganz anderen Charakter. Wie eine einfache Überlegung lehrt, entspricht das erste Gesetz einem Absorptionsstreifen der im Ultravioletten liegt, das zweite einem ultraroten Absorptionsmaximum.

Elfte Vorlesung.

Elektrische Schwingungen in komplizierten Leitern: Verallgemeinerung der elektromagnetischen Emissionstheorie.

§ 1. Stellung und Lösung des allgemeinen Problems. — § 2. Leiter mit einem einzigen Freiheitsgrad. — § 3. Leiter mit zwei Freiheitsgraden. — § 4—5. Leiter mit drei Freiheitsgraden. — § 6. Leiter mit vier und fünf Freiheitsgraden. — § 7. Multiple Wurzeln. — § 8—9. Strahlung eines Leiters mit zwei Freiheitsgraden.

§ 1. Bis jetzt haben wir Hertzsche Erreger mit einer einzigen Schwingungsperiode betrachtet; zur Erweiterung und Verallgemeinerung der Theorie sollen nun komplizierte Leiter zur Berechnung kommen. Ein komplizierter Leiter wird im allgemeinsten Fall von p Kapazitäten gebildet, welche zu je zweien durch m Drähte verbunden sind. Dabei wollen wir $\pi, \varrho, \sigma, \tau$ die laufenden Indizes der Kapazitäten, μ, ν die der Drähte nennen. Jede Kapazität wird mit einem einzigen Kennzeichen (etwa π) bestimmt; jedes Kapazitätenpaar mit zwei Kennzeichen (etwa π, σ) definiert.

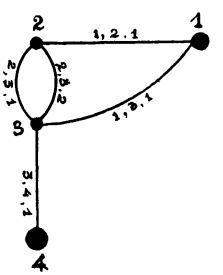


Fig. 35.

Einen Draht stellen wir mit drei Zahlen (etwa π, ϱ, μ) dar, denen die erste und die zweite den Kapazitäten ent-

sprechen, die der Draht verbindet, die dritte dagegen den Draht eigentlich bestimmt. Dementsprechend wird ein Paar von Drähten durch sechs verschiedene Zahlen (etwa $\pi, \varrho, \mu, \sigma, \tau, \nu$) definiert. Diese Verhältnisse sind in der Figur (Fig. 35) für einen einfachen Fall erläutert.

Wir wollen im folgenden mit q die Ladungen, mit K die Potentialskoeffizienten, mit C die Kapazitäten (wenn es nötig ist sie einzuführen), mit R die Widerstände, mit L die Selbstinduktionskoeffizienten, mit i die Stromintensitäten, mit M endlich die Koeffizienten der mutuellen Induktion bezeichnen.

Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß $i_{\pi,\varrho,\mu}$ der Strom ist, welcher von der π-ten zur ϱ-ten Kapazität, über den μ-ten Draht fließt.

Es wird natürlich

$$(1) \qquad \begin{cases} i_{\pi,\pi,\mu} = 0, \\ i_{\pi,\varrho,\mu} = -i_{\varrho,\pi,\mu}; \end{cases}$$

und, aus Gleichung (7) (VIII. Vorl. § 1 und 5)

$$(2) \qquad D q_\pi + \sum_\varrho \sum_\mu i_{\pi,\varrho,\mu} = 0.$$

Durch das Verfahren, das wir in der achten Vorlesung (§ 2, 3 und 4) benutzt haben, lassen sich übrigens die für den komplizierten Leiter charakteristischen Funktionen T, U, V ohne Mühe berechnen.

Es wird nämlich

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_\pi \sum_\varrho \sum_\mu \sum_\sigma \sum_\tau \sum_\nu M_{\pi,\varrho,\mu,\sigma,\tau,\nu}\, i_{\pi,\varrho,\mu}\, i_{\sigma,\tau,\nu},$$ [1])

$$U = \tfrac{1}{2} \sum_\sigma \sum_\tau K_{\sigma,\tau}\, q_\sigma\, q_\tau,$$

$$V = \tfrac{1}{2} \sum_\pi \sum_\varrho \sum_\mu R_{\pi,\varrho,\mu}\, i^2_{\pi,\varrho,\mu}.$$

---

[1]) Wir betrachten z. B. einen Leiter, der nur zwei Drähte hat, etwa entspr. Fig. 36, und wollen sie durch die Indices 1 und 2 bezeichnen. Dann ziehen wir eine Fläche σ, die den ersten Draht umhüllt, den zweiten aber nicht schneidet, und nennen τ_1 den inneren, τ_2 den äußeren Raum.

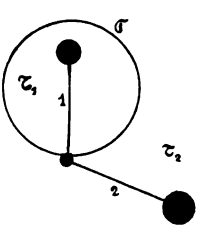


Fig. 36.

Es ist offenbar

$$T = \frac{\mu}{8\pi} \int (L^2 + M^2 + N^2)\, d\tau,$$

$$= \frac{A^2 \mu}{2} \int (Ff + Gg + Hh)\, d\tau,$$

Die Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen auf vorliegendes Problem bietet insofern eine Schwierigkeit, da in der kinetischen Energie eine größere Anzahl von Stromintensitäten vorkommt als die Zahl der Koordinaten in U beträgt.

$$= \frac{A^2\mu}{2}\int[(F_1+F_2)f_1+(G_1+G_2)g_1+(H_1+H_2)h_1]\,d\tau_1$$

$$+\frac{A^2\mu}{2}\int[(F_1+F_2)f_2+(G_1+G_2)g_2+(H_1+H_2)h_2]\,d\tau_2,$$

$$= \frac{A^2\mu}{2}\int(F_1f_1+G_1g_1+H_1h_1)\,d\tau_1 + \frac{A^2\mu}{2}\int(F_2f_1+G_2g_1+H_2h_1)\,d\tau_1$$

$$+\frac{A^2\mu}{2}\int(F_1f_2+G_1g_2+H_1h_2)\,d\tau_2 + \frac{A^2\mu}{2}\int(F_2f_2+G_2g_2+H_2h_2)\,d\tau_2,$$

$$= \frac{A^2\mu}{2}\iint\frac{f_1f_1'+g_1g_1'+h_1h_1'}{r_{1,1}}\,d\tau_1\,d\tau_1' + \frac{A^2\mu}{2}\iint\frac{f_2f_1+g_2g_1+h_2h_1}{r_{2,1}}\,d\tau_2\,d\tau_1$$

$$+\frac{A^2\mu}{2}\iint\frac{f_1f_2+g_1g_2+h_1h_2}{r_{1,2}}\,d\tau_1\,d\tau_2 + \frac{A^2\mu}{2}\iint\frac{f_2f_2'+g_2g_2'+h_2h_2'}{r_{2,2}}\,d\tau_2\,d\tau_2',$$

$$= \frac{A^2\mu i_1^2}{2}\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds_1\,ds_1' + \frac{A^2\mu i_2 i_1}{2}\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds_2\,ds_1$$

$$+\frac{A^2\mu i_1 i_2}{2}\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds_1\,ds_2 + \frac{A^2\mu i_2^2}{2}\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds_2\,ds_2',$$

$$= \tfrac{1}{2}L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2}M i_2 i_1 + \tfrac{1}{2}M i_1 i_2 + \tfrac{1}{2}L_2 i_2^2,$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_\mu\sum_\nu M_{\mu,\nu}\,i_\mu\,i_\nu, \quad (M_{1,1}=L_1,\ M_{1,2}=M_{2,1}=M,\ M_{2,2}=L_2)$$

wie zu beweisen war. Dabei ist

$$M = A^2\mu\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds_1\,ds_2$$

oder, für Luft

$$M = A^2\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds_1\,ds_2$$

der Koeffizient der mutuellen Induktion für das betrachtete Drähtepaar.

Wir werden aber durch folgende Überlegung leicht damit fertig. Aus Gleichung (2) folgt durch Integration

$$q_\pi + \sum_\varrho \sum_\mu \int_0^t d\,t\, i_{\pi,\varrho,\mu} = Q_\pi ,$$

wenn mit Q_π der Anfangswert von q_π bezeichnet wird. Führen wir noch die Definition

$$\int_0^t d\,t\, i_{\pi.\varrho,\mu} = Q_{\pi,\varrho,\mu}$$

ein, so ist

$$q_\pi = Q_\pi - \sum_\varrho \sum_\mu Q_{\pi,\varrho,\mu}$$

zu setzen; und daher auch

$$q_\varrho = Q_\varrho - \sum_\pi \sum_\mu Q_{\varrho,\pi,\mu}.$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{\partial q_\pi}{\partial Q_{\pi,\varrho,\mu}} = -1 , \qquad \frac{\partial q_\varrho}{\partial Q_{\pi,\varrho,\mu}} = 1 .$$

Wir denken uns jetzt die $Q_{\pi,\varrho,\mu}$ in U eingeführt, und wählen sie als neue Variabeln; dabei ist natürlich

$$i_{\pi,\varrho,\mu} = \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}$$

zu setzen.

Bei Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen (IV. Vorl. § 2, Gl. 1) wird jetzt

$$\frac{d}{d\,t} \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}} + \frac{\partial U}{\partial Q_{\pi,\varrho,\mu}} + \frac{\partial V}{\partial \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}} = 0 ,$$

oder, was dasselbe bedeutet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}} + \frac{\partial U}{\partial q_\pi} \frac{\partial q_\pi}{\partial Q_{\pi,\varrho,\mu}} + \frac{\partial U}{\partial q_\varrho} \frac{\partial q_\varrho}{\partial Q_{\pi,\varrho,\mu}} + \frac{\partial V}{\partial \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}} = 0,$$

d. h.

$$\frac{d}{d\,t} \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}} + \frac{\partial U}{\partial q_\varrho} - \frac{\partial U}{\partial q_\pi} + \frac{\partial V}{\partial \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}} = 0 .$$

Gemäß den Ausdrücken von T, U und V erhält man aber

$$\frac{d}{d\,t} \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}} = \sum_\sigma \sum_\tau \sum_\nu D\, M_{\pi,\varrho,\mu,\sigma,\tau,\nu}\, \dot{i}_{\sigma,\tau,\nu} ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_\varrho} = \sum_\tau K_{\varrho,\tau} q_\tau, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_\pi} = \sum_\sigma K_{\pi,\sigma} q_\sigma,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{Q}_{\pi,\varrho,\mu}} = R_{\pi,\varrho,\mu} i_{\pi,\varrho,\mu},$$

und durch Einführen dieser Werte in die Bewegungsgleichung

$$\sum_\sigma \sum_\tau \sum_\nu D M_{\pi,\varrho,\mu,\sigma,\tau,\nu} i_{\sigma,\tau,\nu} + \sum_\tau K_{\varrho,\tau} q_\tau - \sum_\sigma K_{\pi,\sigma} q_\sigma + R_{\pi,\varrho,\mu} i_{\pi,\varrho,\mu} = 0,$$

oder endlich

$$(3) \quad \sum_\tau K_{\varrho,\tau} q_\tau - \sum_\sigma K_{\pi,\sigma} q_\sigma + \sum_\sigma \sum_\tau \sum_\nu N_{\pi,\varrho,\mu,\sigma,\tau,\nu} i_{\sigma,\tau,\nu} = 0,$$

wo die N durch die Gleichungen

$$N_{\pi,\varrho,\mu,\pi,\varrho,\mu} = R_{\pi,\varrho,\mu} + D L_{\pi,\varrho,\mu},$$

$$N_{\pi,\varrho,\mu,\sigma,\tau,\nu} = D M_{\pi,\varrho,\mu,\sigma,\tau,\nu}$$

zu definieren sind.

Die gesamte Zahl der Gleichungen (2) und (3) gleicht der Zahl der unbekannten Funktionen q und i; sie beträgt nämlich $p + m$. Nach der vierten Vorlesung (§ 3) vollführen wir die Elimination, indem wir jedem q und jedem i die Determinante der Koeffizienten vorsetzen.

Nun ist offenbar diese Determinante eine Funktion des Operators D, deren Grad höchstens gleich $p + m$ werden kann; es ist aber leicht zu zeigen, daß bei wirklicher Berechnung der Grad sich als niedriger erweisen wird.

Nach den Gleichungen (1) und (2) ist

$$D \sum_\pi q_\pi = - \sum_\pi \sum_\varrho \sum_\mu i_{\pi,\varrho,\mu} = 0,$$

was der Aussage entspricht, daß die gesamte Ladung unverändert bleiben muß.

Wir können daher durch Addieren von mehreren Linien den Faktor D zu einem gemeinsamen, für eine ganze Linie der Determinante machen.

Dann erniedrigt sich natürlich die Ordnung der Differentialgleichung um eine Einheit, und wird zu

$$\gamma = p + m - 1.$$

In einem komplizierten Leiter genügt also jede Ladung und jede Intensität einer gewöhnlichen, homo-

genen Differentialgleichung, deren Ordnung in der Weise zu berechnen ist, daß man die Zahl der Kapazitäten zu der Zahl der Drähte addiert, und dann von der Summe die Einheit abzieht. Die Charakteristik einer solchen Gleichung, die wir als Charakteristik des Leiters bezeichnen wollen, wird erhalten beim Nullsetzen der Determinante; dabei ist natürlich das Zeichen D als eine Unbekannte, und nicht mehr als ein Operator zu betrachten.

Die Charakteristik hat den Grad

$$p + m - 1 .$$

Gibt es z. B. im Leiter zwei Kapazitäten und einen einzigen Draht, so wird der Grad zu 2, was eben mit den Ergebnissen der achten Vorlesung (§ 5) in Übereinstimmung steht. Wäre ein Leiter nach dem Kekuléschen Benzolschema (Fig. 37) zu berechnen, so würde seine Charakteristik zu einer Gleichung sechsundzwanzigsten Grades werden.

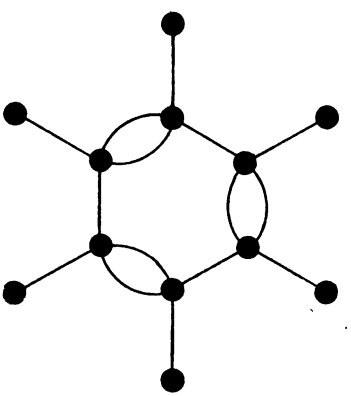


Fig. 37.

Das Verfahren, das wir eben geschildert, wäre bei praktischen Fällen gar nicht zu empfehlen, denn selbst wenn der betrachtete Leiter ein kaum komplizierter ist, so wird die Ordnung der Determinante sehr hoch, und ihre Entwicklung sehr mühsam und weitläufig. Am besten wird man fertig, wenn man durch die Gleichungen (2) die Ladungen aus (3) eliminiert. Damit wird also ein System von m Gleichungen für die m Intensitäten erhalten; und die Ordnung der Determinante sinkt ebenfalls auf m. Die Natur und der Grad der Charakteristik bleiben übrigens unverändert.

Jetzt empfiehlt es sich die Drähte mit einer einzigen laufenden Zahl zu bezeichnen, so daß die (3) zu

$$(4) \qquad \sum_1^m{}_\nu P_{\mu,\nu} i_\nu = 0 \qquad (\mu = 1 \cdot 2 \ldots m)$$

werden, und die Charakteristik die neue Form

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \ldots . & P_{1,m} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \ldots . & P_{2,m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ P_{m,1} & P_{m,2} \ldots & P_{m,m} \end{vmatrix} = 0$$

erhält.

§ 2. Wir wollen jetzt einige Einzelfälle berechnen, um zu zeigen, wie die Methode auf gegebene Leiter anzuwenden ist. Die Resultate unserer Rechnungen werden wir übrigens in den nächsten Vorlesungen benutzen. Wir fangen an mit der Betrachtung des Leiters, der schon in der achten Vorlesung studiert wurde; dabei lassen wir gewisse Einschränkungen fallen, die damals eingeführt waren.

Die Gleichungen (2) werden jetzt zu

$$(2') \qquad \begin{cases} D q_1 + i = 0, \\ D q_2 - i = 0, \end{cases}$$

und das System (3) ist durch die einzige Gleichung

$$(3') \quad K_{2,1} q_1 + K_{2,2} q_2 - (K_{1,1} q_1 + K_{1,2} q_2) + (R + L D) i = 0,$$

oder

$$(K_{2,1} - K_{1,1}) q_1 + (K_{2,2} - K_{1,2}) q_2 + (R + L D) i = 0$$

zu ersetzen.

Daraus bekommen wir die Charakteristik

$$\begin{vmatrix} D & 0 & 1 \\ 0 & D & -1 \\ K_{2,1} - K_{1,1} & K_{2,2} - K_{1,2} & R + L D \end{vmatrix}$$

$$= D \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & D & -1 \\ K_{2,1} - K_{1,1} & K_{2,2} - K_{1,2} & R + L D \end{vmatrix},$$

$$= D[(R + L D) D + K_{1,1} + K_{2,2} - (K_{1,2} + K_{2,1})] = 0,$$

d. h.

$$(R + L D) D + K_{1,1} + K_{2,2} - 2K_{1,2} = 0,$$

wobei von der Bemerkung Gebrauch gemacht wurde, daß für jeden Wert der π und σ

$$K_{\pi,\sigma} = K_{\sigma,\pi}$$

ist.

Dieselbe Gleichung konnten wir aber schneller durch Elimination der q_1 und q_2 aus (3′) ableiten. Ist der Widerstand sehr klein, so bekommt man für die Schwingungsperiode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{K_{1,1} + K_{2,2} - 2K_{1,2}}}.$$

Wenn die elektrostatischen Wirkungen zu vernachlässigen sind, wird hieraus

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{K_{1,1} + K_{2,2}}};$$

in diesem Falle darf man aber

$$K_{1,1} = \frac{1}{C_1}, \qquad K_{2,2} = \frac{1}{C_2}$$

setzen, und damit erhält man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{C_1 C_2 L}{C_1 + C_2}}.$$

Ist z. B. $C_1 = C$, $C_2 = \infty$, so leiten wir

$$T = 2\pi \sqrt{CL}$$

ab, ist $C_1 = C_2 = C$ zu setzen, so wird endlich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{CL}{2}},$$

was (für kleine Widerstände) mit einem Resultate sich deckt, welches in der achten Vorlesung abgeleitet wurde (VIII. Vorl. § 5).

§ 3. Wir wollen von jetzt an, um die Rechnungen zu vereinfachen, die elektrostatischen Wirkungen als zu vernachlässigende betrachten; dabei führen wir statt der K die Kapazitäten ein.

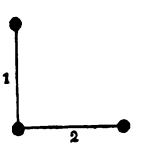


Fig. 38.

Es sei nun ein Leiter gegeben, der drei Kapazitäten besitzt, welche zu je zweien durch zwei gleiche, gerade, aufeinander senkrechte Drähte verbunden werden (Fig. 38).

Die Drähte unterscheiden wir mit den Zahlen 1 und 2; damit erhält das System (4) folgende Form

$$\begin{cases} \left[(R + LD)D + \frac{2}{C}\right] i_1 - \frac{1}{C} i_2 = 0, \\ \left[(R + LD)D + \frac{2}{C}\right] i_2 - \frac{1}{C} i_1 = 0. \end{cases}$$

Der Kürze halber setzen wir

$$(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C} = S,$$

$$-\frac{1}{C} = r,$$

und damit wird die Charakteristik unseres Leiters zu

$$\begin{vmatrix} S & r \\ r & S \end{vmatrix} = S^2 - r^2 = (S - r)(S + r) = 0;$$

hier hat man also zwei Eigenperioden, d. h.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{C\,L}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{C\,L}{3}}.$$

§ 4. Der nächstfolgende Fall ist derjenige eines Leiters, der vier gleiche Kapazitäten und drei gleiche Drähte hat (Fig. 39). Dabei nehmen wir an, daß die Drähte zu je zweien aufeinander senkrecht stehen.

Die Gleichungen (4) werden jetzt zu

$$\begin{cases} \left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_1 - \frac{1}{C}\,i_2 = 0, \\ \left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_2 - \frac{1}{C}\,i_1 - \frac{1}{C}\,i_3 = 0, \\ \left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_3 - \frac{1}{C}\,i_2 = 0, \end{cases}$$

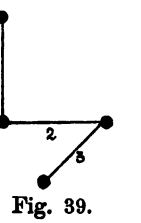


Fig. 39.

woraus die Charakteristik

$$\begin{vmatrix} S & r & 0 \\ r & S & r \\ 0 & r & S \end{vmatrix} = S(S^2 - 2r^2) = S\left(S + r\sqrt{2}\right)\left(S - r\sqrt{2}\right) = 0$$

sich ergibt. Der betrachtete Leiter hat also drei Freiheitsgrade, und die entsprechenden Schwingungsperioden sind durch die Formeln

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{C\,L}{2 - \sqrt{2}}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{C\,L}{2}}, \qquad T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{C\,L}{2 + \sqrt{2}}},$$

zu berechnen.

§ 5. In den eben behandelten Fällen war die Rechnung dadurch erleichtert, daß die mutuelle Induktion fehlte. Die abgeleiteten Formeln haben doch eine weitragende Bedeutung, indem sie annäherungsweise ja immer gelten, wenn nur

die Länge der Drähte sehr groß im Vergleich zu den Querdimensionen ist.

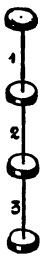


Fig. 40.

Diese Verhältnisse kann man durch Berechnung eines einfachen Leiters erläutern.

Dazu behandeln wir den Leiter, der in der Figur (Fig. 40) dargestellt ist. Er hat wieder vier (gleiche) Kapazitäten und drei (gleiche) Drähte. Die Drähte liegen aber zu einer Geraden parallel, während die Kapazitäten aus dazu senkrecht angebrachten Blechscheiben bestehen.

Man bezeichne mit M den Koeffizienten der mutuellen Induktion für zwei aufeinanderfolgende Drähte (1·2, 2·1, 2·3, 3·2), und mit m den entsprechenden Koeffizienten für zwei entfernte Drähte (1·3, 3·1); und setze noch, der Einfachheit halber

$$\Sigma = D^2 M - \frac{1}{C}, \qquad \sigma = D^2 m;$$

dann wird als Charakteristik

$$\begin{vmatrix} S & \Sigma & \sigma \\ \Sigma & S & \Sigma \\ \sigma & \Sigma & S \end{vmatrix} = (S - \sigma)(S^2 + \sigma S - 2\Sigma^2) = 0.$$

Wir entwickeln diese Gleichung, vernachlässigen die Widerstände, setzen

$$a = L^2 + Lm - 2M^2,$$
$$b = \frac{2}{C}(2L + m + 2M),$$
$$c = \frac{2}{C^2},$$

und erhalten

$$\left[(L - m)D^2 + \frac{2}{C}\right](aD^4 + bD^2 + c) = 0.$$

Hieraus lassen sich aber die Perioden berechnen, also:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{C(L - m)}{2}}, \qquad T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}}.$$

Jetzt hat man M und m zu bestimmen; dies läßt sich jedoch ohne Schwierigkeit ausführen, wenn nur L bekannt ist.

Denn wir dürfen (wenn die Länge eines jeden Drahtes durch l bezeichnet wird)

also
$$L(2l) = 2L(l) + 2M,$$
$$M = \tfrac{1}{2}[L(2l) - 2L(l)]$$

setzen; und, auf ähnliche Weise

d. h.
$$L(3l) = 3L(l) + 4M + 2m,$$
$$m = \tfrac{1}{2}[L(3l) - 3L(l) - 4M].$$

Nach einer Poincaréschen Formel, welche in der neunten Vorlesung (§ 2) abgeleitet wurde, ist nun

$$L(l) = 2A^2 l\left(\log\frac{4l}{d} - 1\right),$$

wo mit d der Durchmesser der Drähte gemeint ist.

Wir bekommen also

$$M = A^2 l \log 4,$$
$$m = A^2 l \log\frac{27}{16}.$$ [1])

Diese Ausdrücke zeigen nun, daß der Selbstinduktionskoeffizient von der Länge l sowie vom Verhältnisse l/d abhängt; die Koeffizienten der

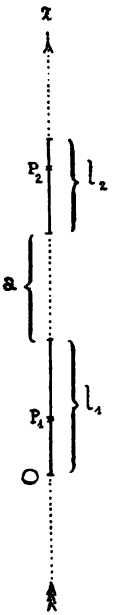


Fig. 41.

[1]) Diese Ausdrücke sind übrigens sehr leicht direkt zu erhalten. Aus der Definition von M (diese Vorlesung, § 1, Fußnote)

$$M = A^2 \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds_1\, ds_2,$$

folgt ja für zwei Drähte, welche auf derselben Geraden liegen (Fig. 41)

$$M = A^2 \int_0^{l_1} dz_1 \int_{a+l_1}^{a+l_1+l_2} dz_2 \frac{1}{z_2 - z_1} = A^2 \int_0^{l_1} dz_1 \log\frac{a + l_1 + l_2 - z_1}{a + l_1 - z_1},$$

$$= A^2[(a + l_1 + l_2)\log(a + l_1 + l_2) - (a + l_2)\log(a + l_2) - (a + l_1)\log(a + l_1) + a\log a],$$

$$= A^2\left[l_1 \log\frac{a + l_1 + l_2}{a + l_1} + l_2 \log\frac{a + l_1 + l_2}{a + l_2} + a\log\frac{a(a + l_1 + l_2)}{(a + l_1)(a + l_2)}\right].$$

Setzen wir also $a = 0$, $l_1 = l_2$, so wird

$$M = A^2 l \log 4;$$

setzen wir dagegen $a = l_1 = l_2$, so erhält man

$$M = m = A^2 l \log\frac{27}{16}.$$

mutuellen Induktion sind dagegen lauter Funktionen von l. Es ist übrigens einleuchtend, daß, wenn d abnimmt, dann L zunimmt. Für lange und dünne Drähte sind daher die M gegen L zu vernachlässigen.

§ 6. Wir machen von diesem Ergebnisse Gebrauch indem wir, zur Berechnung von komplizierteren Leitern fortschreitend, die mutuelle Induktion eben gegen L vernachlässigen. Es wird also angenommen, daß in den betrachteten Leitern lauter dünne und lange Drähte vorkommen.

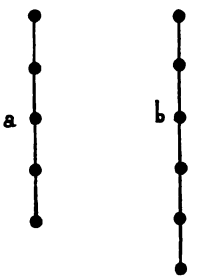


Fig. 42.

Gibt es daher (Fig. 42, a) fünf (gleiche) Kapazitäten und vier (gleiche) Drähte, so wird als Charakteristik

$$\begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 \\ 0 & r & S & r \\ 0 & 0 & r & S \end{vmatrix} = S^4 - 3r^2S^2 + r^4 = 0$$

erhalten, woher die Schwingungsperioden

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2 - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2 - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}},$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}}, \qquad T_4 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}}$$

folgen.

Wird der Leiter dagegen von sechs (gleichen) Kapazitäten gebildet, welche zu je zwei durch fünf (gleiche) Drähte verbunden werden (Fig. 42, b), so nimmt die Charakteristik die neue Form

$$\begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 & 0 \\ 0 & r & S & r & 0 \\ 0 & 0 & r & S & r \\ 0 & 0 & 0 & r & S \end{vmatrix} = S(S^4 - 4r^2S^2 + 3r^4) = 0$$

an, woraus wieder die Eigenperioden

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2-\sqrt{3}}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{CL},$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2}},$$

$$T_4 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{3}}, \qquad T_5 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2+\sqrt{3}}}$$

sich ableiten lassen.

§ 7. Der Satz, den wir gleich am Anfang dieser Vorlesung (§ 1) bewiesen haben, wonach der Grad der Charakteristik für einen gegebenen Leiter durch die Formel

$$\gamma = p + m - 1$$

zu berechnen ist, bestimmt eigentlich eine obere Grenze für den betreffenden Grad. Es können aber einige Wurzeln zu mehrfachen werden, was die Freiheit der Schwingungen erniedrigt. Um darüber klar zu werden, betrachte man den Leiter, der durch Fig. 43 dargestellt wird. Es handelt da sich um vier Kapazitäten, welche zu je zweien durch drei (gleiche) Drähte verbunden sind; die Drähte gehen immer von derselben Kapazität aus und stehen übrigens, wie vorher (§ 4), aufeinander senkrecht.

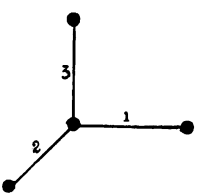


Fig. 43.

System (4) nimmt jetzt die Form

$$\left[(R + LD)D + \frac{2}{C}\right] i_1 + \frac{1}{C} i_2 + \frac{1}{C} i_3 = 0,$$

$$\left[(R + LD)D + \frac{2}{C}\right] i_2 + \frac{1}{C} i_3 + \frac{1}{C} i_1 = 0,$$

$$\left[(R + LD)D + \frac{2}{C}\right] i_3 + \frac{1}{C} i_1 + \frac{1}{C} i_2 = 0$$

an; und die Charakteristik wird zu

$$\begin{vmatrix} S & -r & -r \\ -r & S & -r \\ -r & -r & S \end{vmatrix} = S(S^2 - r^2) - 2r^2(S + r) = (S - 2r)(S + r)^2 = 0.$$

Hiernach beschränken sich die Schwingungsperioden auf zwei und zwar

$$T_1 = 2\pi\sqrt{CL}, \qquad T_2 = 2\pi\frac{\sqrt{CL}}{2};$$

die erste ist dabei doppelt so groß wie die zweite.

§ 8. Die Berechnung der Strahlung, welche von einem komplizierten Leiter ausgesandt wird, gestaltet sich im allgemeinen sehr schwer. In einigen Fällen kann man aber die Rechnung nach dem in der achten Vorlesung (§ 8 u. f.) angegebenen Verfahren durchführen.

Als Beispiel wollen wir den Leiter mit zwei Eigenperioden betrachten, der im dritten Paragraphen dieser Vorlesung behandelt wurde; dabei greifen wir die ganze Rechnung nach der allgemeinen Methode (IV. Vorl. § 3 und 4) vom Anfang wieder an.

Die Gleichungen des Problems lauten jetzt, bei Vernachlässigung der Widerstände

$$(6) \qquad \begin{cases} Dq_1 + i_1 = 0, \\ Dq_2 - i_1 + i_2 = 0, \\ Dq_3 - i_2 = 0, \\ q_1 - q_2 - CLDi_1 = 0, \\ q_2 - q_3 - CLDi_2 = 0; \end{cases}$$

worauf die Charakteristik

$$\begin{vmatrix} D & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & D & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & D & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -CLD & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -CLD \end{vmatrix} = 0$$

sich ableiten läßt (IV. Vorl. § 4).

Beim Entwickeln wird

$$D\begin{vmatrix} D & 0 & -1 & 1 \\ 0 & D & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -CLD & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -CLD \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & D & 0 & 1 \\ 0 & 0 & D & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -CLD \end{vmatrix} =$$

$$D\left(D\begin{vmatrix} D & -1 & 1 \\ -1 & -CLD & 0 \\ 1 & 0 & -CLD \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -CLD \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} D & 0 & 1 \\ 0 & D & -1 \\ 1 & -1 & -CLD \end{vmatrix},$$

$$= D\Big[D\Big(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -CLD \end{vmatrix} - CLD\begin{vmatrix} D & 1 \\ 1 & -CLD \end{vmatrix}\Big) - D\begin{vmatrix} 0 & -CLD \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\Big] - D\begin{vmatrix} D & -1 \\ -1 & -CLD \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & D \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$= DC^2\left(LD^2 + \frac{1}{C}\right)\left(LD^2 + \frac{3}{C}\right) = 0,$$

was eben mit den, im dritten Paragraphen erhaltenen Resultaten vollständig übereinstimmt.

Wir dürfen also z. B.

$$q_1 = C_1 e^{c_1 t} + C_2 e^{c_2 t} + C_3 e^{c_3 t} + C_4 e^{c_4 t} \tag{7}$$

mit

$$c_1 = +i\frac{1}{\sqrt{CL}},\quad c_2 = -i\frac{1}{\sqrt{CL}},\quad c_3 = +i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{CL}},\quad c_4 = -i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{CL}}$$

setzen.

Man nehme jetzt die vier ersten der Gleichungen (6) und betrachte sie als (algebraische) Gleichungen für die unbekannten Funktionen $q_2 \cdot q_3 \cdot i_1$ und i_2 (IV. Vorl. § 4); dann wird

$$\left\{\begin{aligned} i_1 &= -Dq_1, \\ Dq_2 - i_1 + i_2 &= 0, \\ Dq_3 - i_2 &= 0, \\ -q_2 - CLDi_1 &= -q_1, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

und, der Reihe nach

$$q_2 = -\frac{\begin{vmatrix} D & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & D & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -CLD & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} q_1 = +\frac{D(CLD^2+1)}{\Delta} q_1.$$

$$q_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & D & 1 & 0 \\ D & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -CLD & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} q_1 = -\frac{D(CLD^3+2)}{\Delta} q_1,$$

mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & -1 & 1 \\ 0 & D & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -CLD & 0 \end{vmatrix} = D,$$

also:

$$(9) \qquad q_2 = (CLD^2+1)q_1, \qquad q_3 = -(CLD^2+2)q_1,$$

und dabei

$$(9) \qquad i_1 = -Dq_1, \qquad i_2 = -D(CLD^2+2)q_1.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Werte wirklich den Gleichungen (6) genügen; und zwar zeigt sich dabei, daß den vier ersten Gleichungen identisch, der fünften aber unter Berücksichtigung der Differentialgleichung

$$(CLD^2+1)(CLD^2+3)q_1 = 0$$

genügt wird.

Setzen wir für q_1 seinen Wert (7) in die Gleichungen (9) ein, so erhalten wir

$$\begin{cases} q_2 = \sum_1^4{}_\pi C_\pi (CLc_\pi^2+1)e^{c_\pi t}, \\ q_3 = -\sum_1^4{}_\pi C_\pi (CLc_\pi^2+2)e^{c_\pi t}, \\ i_1 = -\sum_1^4{}_\pi C_\pi c_\pi e^{c_\pi t}, \\ i_2 = -\sum_1^4{}_\pi C_\pi c_\pi (CLc_\pi^2+2)e^{c_\pi t}. \end{cases}$$

Es ist aber

$$c_1^2 = c_2^2 = -\frac{1}{CL}, \qquad c_3^2 = c_4^2 = -\frac{3}{CL},$$

also:

$$(7)\quad \begin{cases} q_2 = -2(C_3 e^{c_3 t} + C_4 e^{c_4 t}), \\ q_3 = -C_1 e^{c_1 t} - C_2 e^{c_2 t} + C_3 e^{c_3 t} + C_4 e^{c_4 t}, \\ i_1 = -\frac{i}{\sqrt{CL}}[C_1 e^{c_1 t} - C_2 e^{c_2 t} + \sqrt{3}(C_3 e^{c_3 t} - C_4 e^{c_4 t})], \\ i_2 = -\frac{i}{\sqrt{CL}}[C_1 e^{c_1 t} - C_2 e^{c_2 t} - \sqrt{3}(C_3 e^{c_3 t} - C_4 e^{c_4 t})]. \end{cases}$$

§ 9. Um die Integrationskonstanten vollständig zu berechnen, stelle man folgende Anfangsbedingungen auf

$$(q_1)_{t=0} = Q_1, \quad (q_2)_{t=0} = 0, \quad (q_3)_{t=0} = -Q_1,$$
$$(i_1)_{t=0} = (i_2)_{t=0} = 0,$$

d. h.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = Q_1, \\ C_3 + C_4 = 0, \\ -(C_1 + C_2) + C_3 + C_4 = -Q_1, \\ C_1 - C_2 + \sqrt{3}(C_3 - C_4) = 0, \\ C_1 - C_2 - \sqrt{3}(C_3 - C_4) = 0, \end{cases}$$

woraus

$$C_1 = C_2 = \frac{Q_1}{2}, \qquad C_3 = C_4 = 0$$

folgt, und damit

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \cos \mathfrak{n}_1 t, & i_1 &= \mathfrak{n}_1 Q_1 \sin \mathfrak{n}_1 t, \\ q_2 &= 0, & i_2 &= \mathfrak{n}_1 Q_1 \sin \mathfrak{n}_1 t, \\ q_3 &= -Q_1 \cos \mathfrak{n}_1 t, & & \end{aligned} \qquad \mathfrak{n}_1 = \sqrt{\frac{1}{CL}}.$$

Es schwingt also die Ladung Q_1 von der ersten zu der dritten Kapazität und die Periode ist dabei diejenige, welche im dritten Paragraphen dieser Vorlesung mit T_1 bezeichnet wurde, d. h.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{CL}.$$

Setzen wir dagegen

$$(q_1)_{t=0} = Q_2, \quad (q_2)_{t=0} = -2Q_2, \quad (q_3)_{t=0} = Q_2,$$
$$(i_1)_{t=0} = (i_2)_{t=0} = 0,$$

so wird

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = Q_2, \\ -2(C_3 + C_4) = -2Q_2, \\ -(C_1 + C_2) + C_3 + C_4 = Q_2, \\ C_1 - C_2 + \sqrt{3}(C_3 - C_4) = 0, \\ C_1 - C_2 - \sqrt{3}(C_3 - C_4) = 0, \end{cases}$$

also:

$$C_1 = C_2 = 0, \qquad C_3 = C_4 = \frac{Q_2}{2},$$

und daher

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_2 \cos \mathfrak{n}_2 t, \\ q_2 &= -2 Q_2 \cos \mathfrak{n}_2 t, \\ q_3 &= Q_2 \cos \mathfrak{n}_2 t, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_1 &= \mathfrak{n}_2 Q_2 \sin \mathfrak{n}_2 t, \\ i_2 &= -\mathfrak{n}_2 Q_2 \sin \mathfrak{n}_2 t, \end{aligned} \qquad \mathfrak{n}_2 = \sqrt{\frac{3}{CL}}.$$

Jetzt schwingt eine Ladung Q_2 von der ersten zu der zweiten Kapazität, und eine gleiche Ladung, gleichzeitig, von der dritten zu der zweiten Kapazität. Die Periode ist dabei

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{CL}{3}}.$$

§ 10. Sind die Ladungen im Anfangszustand ganz zufällig gewählt (doch mit der einzigen Bedingung, daß das gesamte Quantum gleich Null sei) so dürfen wir immer

$$\begin{aligned} (q_1)_{t=0} &= a &&= \left(a + \frac{b}{2}\right) + \left(-\frac{b}{2}\right), \\ (q_2)_{t=0} &= b &&= -2\left(-\frac{b}{2}\right), \\ (q_3)_{t=0} &= -(a+b) &&= -\left(a + \frac{b}{2}\right) + \left(-\frac{b}{2}\right) \end{aligned}$$

setzen; schreibt man aber, der Kürze halber

$$a + \frac{b}{2} = Q_1, \qquad -\frac{b}{2} = Q_2,$$

so wird

$$\begin{aligned} (q_1)_{t=0} &= Q_1 + Q_2, \\ (q_2)_{t=0} &= -2 Q_2, \\ (q_3)_{t=0} &= -Q_1 + Q_2; \end{aligned}$$

der allgemeine Prozeß setzt sich also aus zwei Partialschwingungen zusammen, welche eben den Fällen entsprechen, die im vorigen Paragraphen behandelt wurden.

Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= Q_1 + Q_2, \\ -2(C_3 + C_4) &= -2 Q_2, \\ -(C_1 + C_2) + C_3 + C_4 &= -Q_1 + Q_2, \\ C_1 - C_2 + \sqrt{3}(C_3 - C_4) &= 0, \\ C_1 - C_2 - \sqrt{3}(C_3 - C_4) &= 0 \end{aligned}$$

wird

$$C_1 = C_2 = \frac{Q_1}{2}, \qquad C_3 = C_4 = \frac{Q_2}{2},$$

und folglich

$$q_1 = Q_1 \cos \mathfrak{n}_1 t + Q_2 \cos \mathfrak{n}_2 t,$$
$$q_2 = -2 Q_2 \cos \mathfrak{n}_2 t,$$
$$q_3 = -Q_1 \cos \mathfrak{n}_1 t + Q_2 \cos \mathfrak{n}_2 t,$$
$$i_1 = \mathfrak{n}_1 Q_1 \sin \mathfrak{n}_1 t + \mathfrak{n}_2 Q_2 \sin \mathfrak{n}_2 t,$$
$$i_2 = \mathfrak{n}_1 Q_1 \sin \mathfrak{n}_1 t - \mathfrak{n}_2 Q_2 \sin \mathfrak{n}_2 t.$$

Es bedeuten aber diese Lösungen, daß unser Leiter in die Ferne dieselben Wirkungen ausübt, als wenn er durch drei einfache Leiter (in Fig. 44 punktiert gezeichnet) ersetzt wäre.

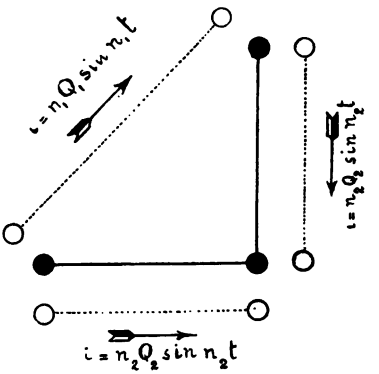


Fig. 44.

Die Strahlung ist also nach der in der achten Vorlesung (§ 8 u. f.) angegebenen Methode zu berechnen; wie sich leicht zeigen läßt, besteht sie aus zwei Wellenscharen, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum fortpflanzen.

Die zwei Wellen haben die Perioden T_1 und T_2 und sind in senkrechten Ebenen polarisiert.[1])

Zwölfte Vorlesung.

Weitere Entwicklung der elektromagnetischen Dispersionstheorie.

§ 1. Einleitendes. — § 2—4. Berechnung eines Mediums mit zwei Absorptionsstreifen. — § 5—6. Ein Medium mit drei Absorptionsstreifen. — § 7. Verallgemeinerung der Theorie. — § 8. Dispersionsformel.

§ 1. In der sechsten wie in der zehnten Vorlesung, bei der Darstellung der v. Helmholtzschen und der elektromagnetischen Dispersionstheorie, haben wir Gebilde mit einem

[1]) Dieser Strahlungsprozeß wurde auf Anregung des Verfassers von Dr. P. Zonta (in Genua) berechnet.

einzigen Freiheitsgrad, also mit einer einzigen Schwingungsperiode berechnet. Nun liegt diesen Ausführungen eine gewisse Beschränkung zugrunde, die wir jetzt fallen lassen wollen.

Denn solche Mittel, wie wir sie bislang betrachtet haben, besitzen ein einziges Absorptionsmaximum, was den wirklichen Verhältnissen kaum entsprechen kann. Zur Verallgemeinerung der Theorie nahm schon seiner Zeit v. Helmholtz die Anwesenheit von mehreren Molekülarten an; diese Anschauung ist aber als unwahrscheinlich zu beseitigen.[1]) Wir wollen dagegen das Molekül durch ein kompliziertes Gebilde darstellen, etwa nach dem Muster der Leiter, die wir in der letzten Vorlesung berechnet haben.

§ 2. Als erstes Beispiel betrachten wir den Leiter mit zwei Freiheitsgraden, der im dritten Paragraphen der vorigen Vorlesung studiert wurde.

Der Einfachheit halber denken wir uns aber die zwei Drähte auf derselben Geraden liegend, und vernachlässigen die mutuelle Induktion, was, wie bemerkt, unter gewissen Annahmen immer gestattet ist.

Den Lagrangeschen Gleichungen

$$\left[(R+LD)D+\frac{2}{C}\right]i_1-\frac{1}{C}i_2=0,$$

$$\left[(R+LD)D+\frac{2}{C}\right]i_2-\frac{1}{C}i_1=0$$

setze man, um dem Einflusse der vorbeieilenden elektrischen Kräfte Rechnung zu tragen, eine rechte Seite bei; dann erhält man für den α-ten Leiter

$$(1)\qquad \begin{cases} \left[(R+LD)D+\frac{2}{C}\right]i_{a,1}-\frac{1}{C}i_{a,2}=\frac{K_{a,1}}{C}\dot{Z}, \\ \left[(R+LD)D+\frac{2}{C}\right]i_{a,2}-\frac{1}{C}i_{a,1}=\frac{K_{a,2}}{C}\dot{Z}, \end{cases}$$

d. h.

$$\begin{cases} Si_{a,1}+ri_{a,2}=\frac{K_{a,1}}{C}\dot{Z}, \\ ri_{a,1}+Si_{a,2}=\frac{K_{a,2}}{C}\dot{Z}, \end{cases}$$

[1]) Man wird z. B. das Molekül des Eisendampfes nicht als den Inbegriff von viertausend voneinander unabhängig schwingenden Teilchen sich denken.

also:

$$i_{a,1} = \frac{1}{C} \frac{\begin{vmatrix} K_{a,1} & r \\ K_{a,2} & S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S & r \\ r & S \end{vmatrix}} \dot{Z},$$

$$= \frac{1}{C} \frac{K_{a,1} S - K_{a,2} r}{(S+r)(S-r)} \dot{Z},$$

$$= \frac{1}{C} \frac{\frac{1}{2}(K_{a,1} + K_{a,2})(S-r) + \frac{1}{2}(K_{a,1} - K_{a,2})(S+r)}{(S+r)(S-r)},$$

$$= \frac{1}{2C} \left(\frac{K_{a,1} + K_{a,2}}{S+r} + \frac{K_{a,1} - K_{a,2}}{S-r} \right) \dot{Z},$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{K_{a,1} + K_{a,2}}{CLD^2 + CRD + 1} + \frac{K_{a,1} - K_{a,2}}{CLD^2 + CRD + 3} \right) \dot{Z},$$

und daher, beim Festhalten der Bezeichnungen, welche in der zehnten Vorlesung (§ 4) eingeführt worden sind,

$$k_{a,1} = \frac{\sigma}{\sigma_0} h_{a,1} = \frac{i_{a,1}}{\sigma_0} = \frac{1}{2\sigma_0} \left(\frac{K_{a,1} + K_{a,2}}{CLD^2 + CRD + 1} + \frac{K_{a,1} - K_{a,2}}{CLD^2 + CRD + 3} \right) \dot{Z},$$

$$= \left(\frac{\frac{\varepsilon'_{a,1}}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 1} + \frac{\frac{\varepsilon''_{a,1}}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 3} \right) \dot{Z}.$$

Ein ähnlicher Ausdruck gilt nun für jedes i_2; demgemäß erhalten wir für die durch die Flächeneinheit, der z-Achse parallel, hindurch tretende Stromdichte

$$h = \mathfrak{h}_0 + \sum k_{a,1} + \sum k_{\beta,2} = \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \frac{\sum \frac{\varepsilon'_{a,1}}{4\pi} + \sum \frac{\varepsilon'_{\beta,2}}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 1} + \frac{\sum \frac{\varepsilon''_{a,1}}{4\pi} + \sum \frac{\varepsilon''_{\beta,2}}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 3} \right) \dot{Z},$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \frac{\frac{E'}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 1} + \frac{\frac{E''}{4\pi}}{CLD^2 + CRD + 3} \right) \dot{Z},$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} + \frac{\frac{E'}{4\pi}}{1 + a D + b D^2} + \frac{\frac{E''}{4\pi}}{3 + a D + b D^2} \right) \dot{Z},$$

$$= \frac{\varepsilon}{4\pi} \dot{Z},$$

mit

(2) $$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{E'}{1 + a D + b D^2} + \frac{E''}{3 + a D + b D^2} .$$

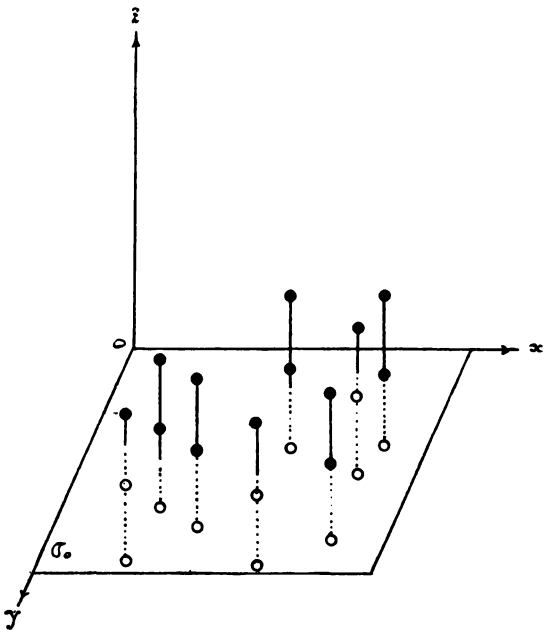


Fig. 45.

Hier sind E' und E'' zwei, für das System der Fig. 45 charakteristische Konsanten.

Ist wie vorher

$$Z = \mathfrak{A} e^{ly - int},$$

so hat man für ε

$$\varepsilon_0 + \frac{E'}{1 - a n i - b n^2} + \frac{E''}{3 - a n i - b n^2}$$

zu setzen.

Woraus durch eine, der in der zehnten Vorlesung (§ 5) entwickelten, ganz ähnliche Rechnung

$$(3)\quad \begin{cases} -\dfrac{k^2}{n^2}+\dfrac{1}{c^2}=A^2\left[\varepsilon_0+\dfrac{E'(1-bn^2)}{(1-bn^2)^2+a^2n^2}+\dfrac{E''(3-bn^2)}{(3-bn^2)^2+a^2n^2}\right], \\ \dfrac{2k}{cn}=A^2an\left[\dfrac{E'}{(1-bn^2)^2+a^2n^2}+\dfrac{E''}{(3-bn^2)^2+a^2n^2}\right] \end{cases}$$

abzuleiten ist.

§ 3. Aus der zweiten unter den Gleichungen (3) kommt nun

$$\frac{k}{c}=\frac{A^2a}{2}\left[\frac{E'n^2}{(1-bn^2)^2+a^2n^2}+\frac{E''n^2}{(3-bn^2)^2+a^2n^2}\right]$$

also:

$$\frac{\partial\left(\frac{k}{c}\right)}{\partial n}=\frac{A^2a}{2}\left\{E'\frac{2n[(1-bn^2)^2+a^2n^2]-n^2[-4bn(1-bn^2)+2a^2n]}{[(1-bn^2)^2+a^2n^2]^2}\right.$$
$$\left.+E''\frac{2n[(3-bn^2)^2+a^2n^2]-n^2[-4bn(3-bn^2)+2a^2n]}{[(3-bn^2)^2+a^2n^2]^2}\right\},$$
$$=\frac{A^2a}{2}\left\{E'\frac{2n(1-bn^2)(1+bn^2)}{[(1-bn^2)^2+a^2n^2]^2}+E''\frac{2n(3-bn^2)(3+bn^2)}{[(3-bn^2)^2+a^2n^2]^2}\right\}.$$

Es werden daher Wellen von unendlich großer oder unendlich kleiner Länge gar nicht absorbiert. Dabei hat das erste Glied auf der rechten Seite ein Maximum für

$$n_1=\sqrt{\frac{1}{b}},\qquad T_1=2\pi\sqrt{b},$$

und das zweite Glied für

$$n_2=\sqrt{\frac{3}{b}},\qquad T_2=2\pi\sqrt{\frac{b}{3}}.$$

Die letztgenannten sind aber, nach der vorigen Vorlesung (§ 3) die Eigenperioden für den Leiter, der das betrachtete Medium bildet.

Hier haben wir also zwei verschiedene Absorptionstreifen, und das System absorbiert wieder die Wellen, die es auszusenden vermag.

§ 4. Bei Vernachlässigung des ersten Gliedes auf der linken Seite der ersten der Gleichungen (3) wird jetzt

$$N^2=\varepsilon_0+\frac{E'(1-bn^2)}{(1-bn^2)^2+a^2n^2}+\frac{E''(3-bn^2)}{(3-bn^2)^2+a^2n^2}.$$

Im ersten Absorptionsmaximum ($T=T_1$) verändert sich das zweite Glied auf der rechten Seite sehr schnell, das dritte

dagegen sehr langsam; für die Umgegend des ersten Streifens ist also

$$N^2 = \mathfrak{N}_1^2 + \frac{E'(1 - b\,n^2)}{(1 - b\,n^2)^2 + a^2 n^2},$$

und, nach einer ähnlichen Überlegung, für die Umgegend des zweiten Streifens

$$N^2 = \mathfrak{N}_2^2 + \frac{E'(3 - b\,n^2)}{(3 - b\,n^2)^2 + a^2 n^2}$$

zu setzen; $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sind dabei als konstante Größen zu betrachten.

Wonach

$$\frac{\partial (N^2 - \mathfrak{N}_1^2)}{\partial n} = 2\,n\,E' \frac{b(1 - b\,n^2)^2 - a^2}{[(1 - b\,n^2)^2 + a^2 n^2]^2},$$

$$\frac{\partial (N^2 - \mathfrak{N}_2^2)}{\partial n} = 2\,n\,E'' \frac{b(3 - b\,n^2)^2 - 3\,a^2}{[(3 - b\,n^2)^2 + a^2 n^2]^2}$$

folgt. Um die Maxima der Absorption herum wird also der Brechungskoeffizient kleiner für kleinere und größer für größere Schwingungsperioden der vorbeieilenden Wellen; was eben den Verhältnissen entspricht, die in Fig. 2 dargestellt worden sind.

§ 5. Zu ganz ähnlichen Resultaten werden wir aber geführt, wenn wir uns Leiter mit drei Eigenschwingungen in das Medium eingebettet denken.

Dann ist für das System der Fig. 46, nach der elften Vorlesung (§ 4 und 5)

$$\left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_1 - \frac{1}{C}\, i_2 = 0,$$

$$\left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_2 - \frac{1}{C}\, i_1 - \frac{1}{C}\, i_3 = 0,$$

$$\left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_3 - \frac{1}{C}\, i_2 = 0,$$

also, unter dem Einfluß von äußeren Kräften

$$(4)\quad \begin{cases} \left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_{a,1} - \frac{1}{C}\, i_{a,2} = \frac{K_{a,1}}{C}\,\dot{Z}, \\ \left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_{a,2} - \frac{1}{C}\, i_{a,1} - \frac{1}{C}\, i_{a,3} = \frac{K_{a,2}}{C}\,\dot{Z}, \\ \left[(R + L\,D)\,D + \frac{2}{C}\right] i_{a,3} - \frac{1}{C}\, i_{a,2} = \frac{K_{a,3}}{C}\,\dot{Z} \end{cases}$$

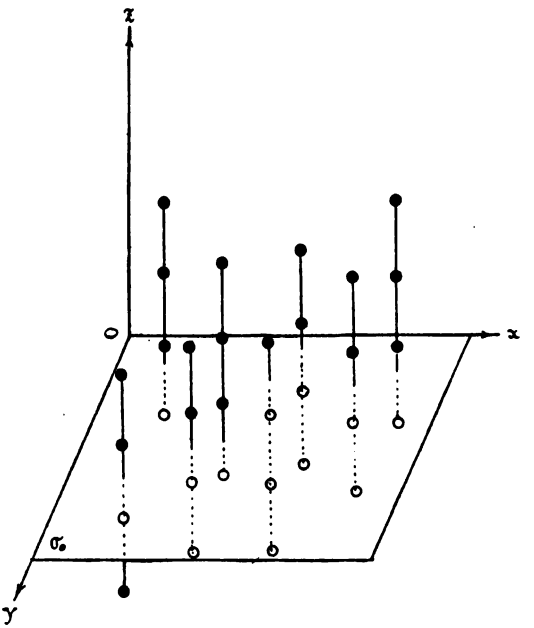


Fig. 46.

zu setzen; es kommt daher

$$i_{a,1} = \frac{1}{C}\frac{\begin{vmatrix} K_{a,1} & r & 0 \\ K_{a,2} & S & r \\ K_{a,3} & r & S \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S & r & 0 \\ r & S & r \\ 0 & r & S \end{vmatrix}}\dot{Z},$$

$$= \frac{1}{C}\frac{K_{a,1}(S^2 - r^2) - r(K_{a,2}S - K_{a,3}r)}{S(S^2 - 2r^2)},$$

$$= \frac{1}{C}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{K_{a,1}+K_{a,3}}{2} + \frac{K_{a,2}}{\sqrt{2}}\right)S(S - r\sqrt{2}) + \frac{K_{a,1}-K_{a,3}}{2}(S + r\sqrt{2})(S - r\sqrt{2})}{S(S + r\sqrt{2})(S - r\sqrt{2})}\dot{Z}$$

$$+ \frac{1}{C}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{K_{a,1}+K_{a,3}}{2} - \frac{K_{a,2}}{\sqrt{2}}\right)S(S + r\sqrt{2})}{S(S + r\sqrt{2})(S - r\sqrt{2})}\dot{Z},$$

$$= \frac{1}{2C}\left(\frac{\frac{K_{a,1}+K_{a,3}}{2}+\frac{K_{a,2}}{\sqrt{2}}}{S+r\sqrt{2}}+\frac{K_{a,1}-K_{a,3}}{S}\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{K_{a,1}+K_{a,3}}{2}-\frac{K_{a,2}}{\sqrt{2}}}{S-r\sqrt{2}}\right)\dot{Z},$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{K_{a,1}+K_{a,3}}{2}+\frac{K_{a,2}}{\sqrt{2}}}{CLD^2+CRD+2-\sqrt{2}}+\frac{K_{a,1}-K_{a,3}}{CLD^2+CRD+2}\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{K_{a,1}+K_{a,3}}{2}-\frac{K_{a,2}}{\sqrt{2}}}{CLD^2+CRD+2+\sqrt{2}}\right)\dot{Z},$$

und endlich

$$h = \frac{s}{4\pi}\dot{Z},$$

mit

$$(5)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 + \dfrac{E'}{2-\sqrt{2}+aD+bD^2} + \dfrac{E''}{2+aD+bD^2} \\ \qquad\qquad + \dfrac{E'''}{2+\sqrt{2}+aD+bD^2}. \end{cases}$$

Bei der üblichen Definition von Z wird nun

$$(6)\qquad \begin{cases} -\dfrac{k^2}{n^2}+\dfrac{1}{c^2} = A^2\left[\varepsilon_0 + \dfrac{E'(2-\sqrt{2}-bn^2)}{(2-\sqrt{2}-bn^2)^2+a^2n^2}\right. \\ \qquad \left. + \dfrac{E''(2-bn^2)}{(2-bn^2)^2+a^2n^2} + \dfrac{E'''(2+\sqrt{2}-bn^2)}{(2+\sqrt{2}-bn^2)^2+a^2n^2}\right], \\ \dfrac{2k}{cn} = A^2 an\left[\dfrac{E'}{(2-\sqrt{2}-bn^2)^2+a^2n^2}\right. \\ \qquad \left. + \dfrac{E'}{(2-bn^2)^2+a^2n^2} + \dfrac{E''}{(2+\sqrt{2}-bn^2)^2+a^2n^2}\right]. \end{cases}$$

§ 6. Man braucht also keine weiteren Rechnungen auszuführen, um folgendes behaupten zu dürfen:

1. Es besitzt unser Medium drei Absorptionsstreifen welche den Eigenperioden seiner Bestandteile

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{b}{2-\sqrt{2}}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{b}{2}}, \qquad T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{b}{2+\sqrt{2}}}$$

entsprechen (man vergleiche hierüber die XI. Vorl. § 4).

2. Es zeigt das Brechungsverhältnis drei Maxima und drei Minima, indem es um einen Absorptionsstreifen kleiner für kleinere und größer für größere Perioden der hindurcheilenden Strahlen wird.

§ 7. Die Theorie, die wir bis jetzt geschildert haben, ist als eine ganz allgemein gültige zu betrachten.

Wird z. B. das System aus willkürlich komplizierten Leitern zusammengesetzt, so wird es immer möglich sein (XI. Vorl. § 1) die Lagrangeschen Gleichungen in die Form

$$\sum_{1}^{m}{}_{\nu} P_{\mu,\nu}\, i_\nu = 0$$

zu bringen; woraus durch die Einführung der äußeren elektrischen Kräfte

$$(7) \qquad \sum_{1}^{m}{}_{\nu} P_{\mu,\nu}\, i_{\alpha,\nu} = K'_{\alpha,\mu}\dot{X} + K''_{\alpha,\mu}\dot{Y} + K'''_{\alpha,\mu}\dot{Z}$$

zu erhalten ist.

Also:

$$i_{\alpha,1} = \frac{\begin{vmatrix} K'_{\alpha,1}\dot{X} + K''_{\alpha,1}\dot{Y} + K'''_{\alpha,1}\dot{Z} & P_{1,2} \ldots P_{1,m} \\ K'_{\alpha,2}\dot{X} + K''_{\alpha,2}\dot{Y} + K'''_{\alpha,2}\dot{Z} & P_{2,2} \ldots P_{2,m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K'_{\alpha,m}\dot{X} + K''_{\alpha,m}\dot{Y} + K'''_{\alpha,m}\dot{Z} & P_{m,2} \ldots P_{m,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \ldots P_{1,m} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \ldots P_{2,m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{m,1} & P_{m,2} \ldots P_{m,m} \end{vmatrix}}.$$

Jetzt wollen wir annehmen, und dieses ist die einzige Einschränkung unserer Theorie, daß die Charakteristik des Leiters lauter komplexe Wurzeln besitzt; dann darf man den Nenner in dem Ausdruck von $i_{\alpha,1}$ in der Form

$$\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \ldots P_{1,m} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \ldots P_{2,m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{m,1} & P_{m,2} \ldots P_{m,m} \end{vmatrix} = N_1 \cdot N_2 \ldots\ldots N_{\frac{p+m-1}{2}}$$

schreiben, wo die N Funktionen zweiten Grades des D sind.

Der Zähler ist offenbar eine Funktion derselben Variabeln von dem Grade $p + m - 3$, also $i_{a,1}$ eine Funktion des Grades -2.

Wie leicht zu beweisen, darf man hiernach

$$i_{a,1} = \frac{Z_{a,1}}{N_1} + \frac{Z_{a,2}}{N_2} + \ldots\ldots + \frac{Z_{a,\frac{p+m-1}{2}}}{N_{\frac{p+m-1}{2}}}$$

setzen; hier sind aber die Z von D unabhängig.

Setzt man noch voraus, daß die Leiter im Medium ganz unregelmäßig verteilt liegen, so wird für die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{E'}{N_1} + \frac{E''}{N_2} + \ldots \tag{8}$$

erhalten.

Hiernach muß das System $(p+m-1)/2$ Absorptionsstreifen zeigen; und der Gang des Brechungskoeffizienten um diese Maxima der Absorption ist auch unmittelbar vorauszusehen.

§ 8. Betrachten wir nun ein Spektralgebiet, dessen Perioden größer als die Eigenperioden des brechenden Systems sind, so wird das zugehörige Brechungsverhältnis durch die Formel

$$N = a + \frac{b}{\Lambda^2} + \frac{c}{\Lambda^4} + \frac{d}{\Lambda^6} + \ldots$$

dargestellt (X. Vorl. § 9, Gleichung 6); liegen dagegen die Absorptionsmaxima im ultraroten Teile des Spektrums, so hat man

$$N = \alpha - \beta \Lambda^2$$

zu setzen (l. c., Gleichung 7).

Untersuchen wir endlich eine Gegend, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Streifen enthalten ist, so muß man die Brechungsgleichung zu

$$N = -A\Lambda^2 + B + \frac{C}{\Lambda^2} + \frac{D}{\Lambda^4} + \frac{E}{\Lambda^6} + \ldots \tag{9}$$

ergänzen (man vergleiche hierzu die I. Vorl. § 1).

Es ist daher kein Wunder, wenn die Formel von Cauchy (V. Vorl. § 5) in vielen Fällen gute Dienste zu leisten vermag (I. Vorl. § 1); die Verhältnisse können ja so liegen, daß die Wirkung der ultravioletten Eigenschwingungen des Mediums eine überwiegende ist.

Dreizehnte Vorlesung.

Elektrische Schwingungen in einem Leitersysteme.

§ 1. Stellung und Lösung des allgemeinen Problems. — § 2. Berechnung eines Resonatorenschirmes. — § 3—5. Ein System von zwei Leitern. — § 6—7. Erklärung der Doubletspektren. — § 8. System von drei Leitern. — § 9. Erklärung der Tripletspektren. — § 10. Verallgemeinerung der Theorie. — § 11. Systeme von Systemen.

§ 1. In der siebenten Vorlesung wurden mechanische Bilder für die Moleküle zusammengesetzter Körper beschrieben; zur Erläuterung der Vorgänge, welche sich an solchen Gebilden abspielen, haben wir jetzt in entsprechender Weise unsere elektromagnetische Theorie zu erweitern.

Dazu betrachten wir ein System von a getrennten, untereinander gleichen oder ungleichen Leitern.

Die Behandlung des Problems ist der in der elften Vorlesung auseinandergesetzten durchaus ähnlich. Der Kürze halber ist es entbehrlich die Lagrangeschen Gleichungen anzuwenden; wir können vielmehr von Anfang an die Gleichungen niederschreiben, die den (2) und (3) der genannten Vorlesung für den jetzigen Fall entsprechen.

Dabei sollen α und β die laufenden Indizes der Leiter; $\pi, \varrho, \sigma, \tau$ die Indizes der Kapazitäten; μ, ν die der Drähte bedeuten. Jeder Leiter wird durch ein einziges Kennzeichen (etwa α) bestimmt; jede Kapazität dagegen mit zwei Kennzeichen (etwa α, π), von denen das erste dem Leiter, das zweite aber der Kapazität eigentlich entspricht. Ein Kapazitätenpaar stellen wir daher mit vier Zahlen (etwa $\alpha, \pi, \beta, \sigma$) dar.

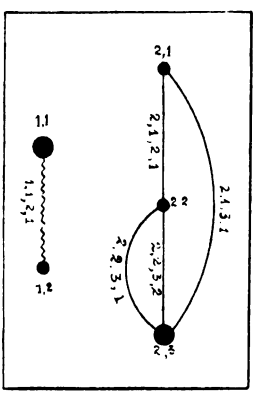


Fig. 47.

Ein Draht wird durch vier Kennzeichen definiert (etwa $\alpha, \pi, \varrho, \mu$), von denen das erste dem Leiter entspricht, dem der Draht gehört, und das zweite und das dritte den Kapazitäten, die er verbindet, das vierte endlich den Draht eigentlich bestimmt. Dementsprechend wird

ein Paar von Drähten durch acht verschiedene Zahlen (etwa $\alpha, \pi, \varrho, \mu, \beta, \sigma, \tau, \nu$) dargestellt. Diese Verhältnisse sind in der Figur (Fig. 47) für einen einfachen Fall erläutert.

Im übrigen behalten wir für die Ladungen, die Potentialskoeffizienten, die Widerstände, die Selbstinduktionskoeffizienten, die Stromintensitäten, sowie für die Koeffizienten der mutuellen Induktion die frühere Schreibweise bei.

Wie vorher ist zu beachten, daß $i_{\alpha,\pi,\varrho,\mu}$ die Intensität des Stromes ist, welcher im α-ten Leiter von der π-ten zur ϱ-ten Kapazität fließt.

Es wird also:

$$(1) \qquad \begin{aligned} i_{\alpha,\pi,\pi,\mu} &= 0, \\ i_{\alpha,\pi,\varrho,\mu} &= -\, i_{\alpha,\varrho,\pi,\mu}. \end{aligned}$$

Nach dem ersten Paragraphen der achten Vorlesung ist nun

$$(2) \qquad D\, q_{\alpha,\pi} + \sum_{\varrho} \sum_{\mu} i_{\alpha,\pi,\varrho,\mu} = 0,$$

und der Gleichung (3) der elften Vorlesung gemäß dürfen wir auch für den jetzigen Fall

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\beta} \sum_{\tau} K_{\alpha,\varrho,\beta,\tau}\, q_{\beta,\tau} - \sum_{\beta} \sum_{\sigma} K_{\alpha,\pi,\beta,\sigma}\, q_{\beta,\sigma} \\ &\qquad + \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \sum_{\nu} N_{\alpha,\pi,\varrho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu}\, i_{\beta,\sigma,\tau,\nu} = 0 \end{aligned}$$

schreiben; dabei ist natürlich

$$\begin{aligned} N_{\alpha,\pi,\varrho,\mu,\alpha,\pi,\varrho,\mu} &= R_{\alpha,\pi,\varrho,\mu} + D\, L_{\alpha,\pi,\varrho,\mu}, \\ N_{\alpha,\pi,\varrho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu} &= D\, M_{\alpha,\pi,\varrho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu} \end{aligned}$$

zu setzen.

Die gesamte Zahl der Gleichungen (2) und (3) ist genau gleich der Zahl der unbekannten Funktionen q und i; und die Elimination wird, wie immer, in der Weise ausgeführt, daß man auf jede Unbekannte die Determinante der Koeffizienten anwendet.

Jedes Element der Determinante ist nun eine Funktion ersten Grades des Operators D, die Determinante selbst wird also höchstens den Grad

$$\sum_{1}^{a} (p_\alpha + m_\alpha)$$

erreichen. Beim wirklichen Entwickeln zeigt sich aber der Grad niedriger, was allerdings auch *a priori* zu erkennen ist.

Nach (1) und (2) wird nämlich

$$D \sum^{\pi} q_{\alpha,\pi} = - \sum^{\pi} \sum^{\varrho} \sum^{\mu} i_{\alpha,\pi,\varrho,\mu} = 0$$

für jeden Wert des α; man kann daher D zu einem gemeinsamen Faktor für a Linien der Determinante durch einfaches Addieren machen. Dann wird der Grad derselben zu

$$\Gamma = \sum_{1}^{a}{}^{\alpha} (p_\alpha + m_\alpha) - a .$$

In einem Leitersystem genügt also jede Ladung und jede Intensität einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung, deren Ordnung in der Weise berechnet wird, daß man die Zahl der Kapazitäten zu der Zahl der Drähte addiert und von der Summe die Zahl der unabhängigen Leiter abzieht. Die Charakteristik der genannten Gleichung, welche im folgenden als Charakteristik des Systems bezeichnet werden wird, erhält man beim Nullsetzen der Determinante und beim Betrachten des D als einer unbekannten Größe; sie hat im allgemeinen den Grad $\sum_{1}^{a}{}^{\alpha} (p_\alpha + m_\alpha) - a$.

Für die einzelnen Leiter, aus denen das System gebildet ist, hat nun die Charakteristik (XI. Vorl. § 1) den Grad

$$\gamma_\alpha = p_\alpha + m_\alpha - 1 ,$$

wir leiten also

$$\Gamma = \sum_{1}^{a}{}^{\alpha} \gamma_\alpha$$

ab.

Es spricht diese Gleichung einen Satz aus, der für unsere Theorie von fundamentaler Bedeutung ist; der Grad der Charakteristik für ein System von komplizierten Leitern, ist gleich der Summe aus den Graden der charakterischen Gleichungen, welche den einzelnen Leitern entsprechen, die das System bilden.

Sind die γ_α lauter gerade Zahlen, so behält natürlich der Satz seine Gültigkeit; wir können daher schließen, daß ein zusammengesetzes System ein Spektrum von so vielen Linien aussenden wird, als seine Bestandteile im ganzen aussenden.

Das Rechnungsverfahren, das wir geschildert haben, ist für wirkliche Fälle nicht geeignet. Es empfiehlt sich vielmehr die Ladungen durch (2) aus (3) zu eliminieren; damit werden dann $\sum_1^a{}^\alpha m_\alpha$ Gleichungen für die $\sum_1^a{}^\alpha m_\alpha$ Intensitäten erhalten, und die Ordnung der Determinante sinkt ebenfalls auf $\sum_1^a{}^\alpha m_\alpha$. Dabei behält allerdings die Charakteristik ihre Natur und ihren Grad.

Es ist übrigens bequem, die Drähte durch ein einziges Merkmal zu kennzeichnen, und die Gleichungen (3) in die neue Form

$$(4)\qquad \sum_1^n{}^\nu P_{\mu,\nu}\, i_\nu = 0, \qquad (\mu = 1, 2 \ldots n), \qquad n = \sum_1^a{}^\alpha m_\alpha,$$

zu bringen; dann wird die Charakteristik zu

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \ldots P_{1,n} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \ldots P_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n,1} & P_{n,2} \quad P_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2. Um die im vorigen Paragraphen dargestellte Theorie durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, wollen wir jetzt den Resonatorenschirm betrachten, der in der zweiten Vorlesung (§ 2) beschrieben wurde.

Es handelt sich also um ein System von gleichen Leitern, mit einer einzigen Schwingungsperiode.

Werden die elektrostatischen Wirkungen vernachlässigt, so bekommt man

$$\begin{cases} D\, q_{\alpha,1} + i_\alpha = 0, \\ D\, q_{\alpha,2} - i_\alpha = 0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{C_{\alpha,1}}\, q_{\alpha,1} - \frac{1}{C_{\alpha,2}}\, q_{\alpha,2} - \sum_1^a{}^\beta N_{\alpha,\beta}\, i_\beta = 0, \qquad (\alpha = 1 \cdot 2 \ldots a),$$

und bei Einführung der Definitionen

$$D\, N_{\alpha,\beta} = P_{\alpha,\beta}, \qquad (\alpha \neq \beta;\ \alpha, \beta = 1 \cdot 2 \ldots a),$$

$$D\, N_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{C_{\alpha,1}} + \frac{1}{C_{\alpha,2}} = P_{\alpha,\alpha}, \qquad (\alpha = 1 \cdot 2 \ldots a),$$

endlich

$$\sum_1^a{}^\beta P_{\alpha,\beta}\, i_\beta = 0.$$

Jedes i_a bildet also eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \dots P_{1,a} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \dots P_{2,a} \\ \dots\dots\dots\dots \\ P_{a,1} & P_{a,2} \dots P_{a,a} \end{vmatrix} i_a = 0,$$

welche eine homogene lineare Differentialgleichung von der Ordnung $2a$ ist.

In der Tat reflektiert ein solcher Schirm erfahrungsgemäß keine monochromatische Strahlung.

Die Größe der Perioden für die gestörte Bewegung ist leicht zu berechnen, wenn man die Resonatoren als untereinander gleich voraussetzt.

Wir erhalten dann

$$P_{a,\beta} = D^2 M_{a,\beta},$$

und, bei Vernachlässigung der Widerstände,

$$P_{a,a} = D^2 L + \frac{2}{C};$$

dadurch formt sich die Charakteristik zu

$$\begin{vmatrix} D^2 L + \frac{2}{C} & D^2 M_{1,2} \dots D^2 M_{1,a} \\ D^2 M_{2,1} & D^2 L + \frac{2}{C} \dots D^2 M_{2,a} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^2 M_{a,1} & D^2 M_{a,2} \dots D^2 L + \frac{2}{C} \end{vmatrix} = 0$$

um, d. h.

$$\begin{vmatrix} L + \frac{2}{C D^2} & M_{1,2} \dots M_{1,a} \\ M_{2,1} & L + \frac{2}{C D^2} \dots M_{2,a} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{a,1} & M_{a,2} \dots L + \frac{2}{C D^2} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{vmatrix} L + \frac{2x}{C} & M_{1,2} \dots M_{1,a} \\ M_{2,1} & L + \frac{2x}{C} \dots M_{2,a} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ M_{a,1} & M_{a,2} \dots L + \frac{2x}{C} \end{vmatrix} = 0,$$

wenn

$$x = \frac{1}{D^2}.$$

Bezeichnet man daher mit x_α ($\alpha = 1 \cdot 2 \ldots a$) die Wurzeln der letzten Gleichung, so hat man die gesuchten Schwingungsperioden nach der Formel

$$T_\alpha = 2\pi\sqrt{-x_\alpha}$$

zu berechnen.

Wir wollen noch

$$x = -\left(\frac{CL}{2} + y\right)$$

setzen, wodurch die Charakteristik die neue Form

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} -\frac{2y}{C} & M_{1,2} & \ldots & M_{1,a} \\ M_{2,1} & -\frac{2y}{C} & \ldots & M_{2,a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{a,1} & M_{a,2} & \ldots & -\frac{2y}{C} \end{vmatrix} = 0$$

annimmt.

Man darf also die Perioden nach der Gleichung

$$T_\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2} + y_\alpha}$$

berechnen, wo mit y_α die Wurzeln von (*) gemeint sind; sind übrigens die $M_{\alpha,\beta}$ als kleine Größen gegen L zu betrachten, so muß auch y_α gegen $CL/2$ klein werden, und damit erhält man

$$T_\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{2}}\left(1 + \frac{y_\alpha}{CL}\right) = T'\left(1 + \frac{y_\alpha}{CL}\right).$$

Es bedeuten also die y_α/CL die Verschiebungen, welche von der einzigen früheren Periode zu den neuen a Perioden führen.

§ 3. Um die Rechnungen zu vereinfachen wollen wir von jetzt an voraussetzen, daß die elektrostatischen Wirkungen für Ladungen, welche zu verschiedenen Leitern gehören, zu vernachlässigen sind. Läßt man in einigen Fällen diese Einschränkung fort, so wird dies im folgenden ausdrücklich bemerkt werden. Damit erleiden übrigens die Vorgänge, also auch die Ergebnisse unserer Theorie, keine prinzipielle Abänderung.

Hat man die Gleichungen (5) der elften Vorlesung für die einzelnen Leiter des Systems niedergeschrieben, so ist es durchaus leicht die Charakteristik des ganzen Systems zu bilden. Die Elimination der Ladungen wird ja für jeden Leiter ganz gesondert vorgenommen; die Gleichungen (5) dieser Vorlesung sind also aus den Gleichungen (5) der elften Vorlesung in der Weise abzuleiten, daß zu den linken Seiten Glieder der Form

$$D^2 M_{\mu,\nu} i_\nu$$

hinzugefügt werden, welche die Induktionswirkungen darstellen, die die Drähte der anderen Leiter auf den Draht ausüben, dem die betrachtete Gleichung entspricht.

Ist, um das einfachste Beispiel zu berechnen, das System aus zwei Leitern gebildet, und werden die Drähte des ersten Leiters durch die Zahlen von 1 bis m, die des zweiten aber durch die Zahlen von $m+1$ bis $m+r$ bezeichnet, so nehmen die Gleichungen (5) der elften Vorlesung die Form

$$\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,m} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \dots & P_{m,m} \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} P_{m+1,m+1} & P_{m+1,m+2} & \dots & P_{m+1,m+r} \\ P_{m+2,m+1} & P_{m+2,m+2} & \dots & P_{m+2,m+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m+r,m+1} & P_{m+r,m+2} & \dots & P_{m+r,m+r} \end{vmatrix} = 0$$

an; und damit wird die Charakteristik des Systems zu

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots P_{1,m} & D^2M_{1,m+1} & D^2M_{1,m+2} \dots D^2M_{1,m+r} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots P_{2,m} & D^2M_{2,m+1} & D^2M_{2,m+2} \dots D^2M_{2,m+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \dots P_{m,m} & D^2M_{m,m+1} & D^2M_{m,m+2} \dots D^2M_{m,m+r} \\ D^2M_{m+1,1} & D^2M_{m+1,2} \dots D^2M_{m+1,m} & P_{m+1,m+1} & P_{m+1,m+2} & \dots P_{m+1,m+r} \\ D^2M_{m+2,1} & D^2M_{m+2,2} \dots D^2M_{m+2,m} & P_{m+2,m+1} & P_{m+2,m+2} & \dots P_{m+2,m+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^2M_{m+r,1} & D^2M_{m+r,2} \dots D^2M_{m+r,m} & P_{m+r,m+1} & P_{m+r,m+2} & \dots P_{m+r,m+r} \end{vmatrix} = 0.$$

Beim Entwickeln dieser Determinante erhält man offenbar

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{R} + \sum' G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'},$$

wo die G Summen aus Gliedern sind, welche ganze positive Potenzen der M enthalten.

Sind nun die M für zwei Drähte, die zu verschiedenen Leitern gehören, ziemlich klein, so muß das zweite Glied auf der rechten Seite ebenfalls klein gegen $\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}$ sein.

Ein System von zwei Leitern, welche nicht allzunah nebeneinander liegen, sendet also ein Spektrum aus, welches dieselbe Zahl von Linien enthält, die die Spektren enthalten, welche die zwei Leiter gesondert auszustrahlen vermögen; dabei ist die Lage der Linien kaum verändert.[1])

§ 4. Die Verrückungen, die durch die Koppelung in den charakteristischen Spektren der Bestandteile hervorgerufen werden, lassen sich in einigen Fällen leicht berechnen.

Man kann bei der Betrachtung solcher Fälle sogleich gewisse Einschränkungen fallen lassen, die wir bis jetzt eingeführt hatten.

Wir betrachten z. B. ein System von zwei Leitern mit einer einzigen Schwingungsperiode (XI. Vorl. § 2). Dabei nehmen wir an, daß

1. die zwei Drähte gleich sind;
2. die freien Ladungen in einem und demselben Leiter aufeinander keine Wirkungen ausüben;
3. die erste Ladung auf die erste, die zweite auf die zweite wirkt, und die Potentialskoeffizienten für die zwei Paare untereinander gleich sind.

Führt man noch die Definitionen

$$S_1 = (R + L\,D)\,D + 2\,K_1,$$
$$S_2 = (R + L\,D)\,D + 2\,K_2,$$
$$s = M\,D^2 + 2\,H$$

ein, so wird

$$\begin{cases} S_1\,i_1 + s\,i_2 = 0, \\ s\,i_1 + S_2\,i_2 = 0, \end{cases}$$

[1]) Zieht man noch die elektrostatischen Wirkungen in Betracht, so ist es leicht, einen ganz ähnlichen Satz zu beweisen. Die Rechnungen werden aber natürlich ziemlich viel verwickelter.

also, als Charakteristik des Systems

$$\begin{vmatrix} S_1 & s \\ s & S_2 \end{vmatrix} = S_1 S_2 - s^2 = 0 .$$

Beim Entwickeln und Vernachlässigen der Widerstände erhalten wir die Schwingungsperioden

$$T^*, T^{**} = 2\pi \sqrt{\tfrac{1}{2} \frac{2(L^2 - M^2)}{(K_1 + K_2)L - 2HM \pm \sqrt{[(K_1 + K_2)L - 2HM]^2 - 4(K_1 K_2 - H^2)(L^2 - M^2)}}},$$

$$= 2\pi \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}} .$$

Es entspricht dieser Fall der Fig. 48a; ganz ähnliche Resultate sind nun zu erhalten, wenn man gleiche Kapazitäten und verschiedene Drähte als gegeben ansieht (Fig. 48b).

§ 5. Als zweiten Fall wollen wir ein System berechnen das aus zwei Leitern bestehen soll, etwa nach dem Muster des Leiters, welcher im dritten Paragraphen der elften Vorlesung betrachtet wurde.

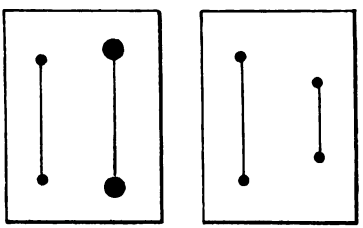


Fig. 48.

Dabei setzen wir voraus, daß

1. die vier Drähte untereinander gleich sind;
2. der erste Draht auf den ersten, der zweite auf den zweiten wirkt, und die Koeffizienten der mutuellen Induktion für die zwei Paare gleich sind;
3. die freien Ladungen eines und desselben Leiters aufeinander keine Wirkungen ausüben;
4. die erste Kapazität auf die erste, die zweite auf die zweite, die dritte endlich auf die dritte wirkt, und die Potentialskoeffizienten für die drei Paare untereinander gleich sind.

Hiernach erhält man

$$\begin{cases} S_1 i_{1,1} - K_1 i_{1,2} + s i_{2,1} - H i_{2,2} = 0, \\ -K_1 i_{1,1} + S_1 i_{1,2} - H i_{2,1} + s i_{2,2} = 0, \\ s i_{1,1} - H i_{1,2} + S_2 i_{2,1} - K_2 i_{2,2} = 0, \\ -H i_{1,1} + s i_{1,2} - K_2 i_{2,1} + S_2 i_{2,2} = 0, \end{cases}$$

und daher

$$\begin{vmatrix} S_1 & -K_1 & s & -H \\ -K_1 & S_1 & -H & s \\ s & -H & S_2 & -K_2 \\ -H & s & -K_2 & S_2 \end{vmatrix}$$

$$= (S_1 S_2 + K_1 K_2 - s^2 - H^2 - K_1 S_2 - K_2 S_1 + 2 s H)(S_1 S_2 + K_1 K_2 - s^2 - H^2 + K_1 S_2 + K_2 S_1 - 2 s H) = 0.$$

Unter Vernachlässigung der Widerstände leiten wir nun aus dieser Gleichung die Schwingungsperioden

$$T_1^*,\ T_1^{**} = 2\pi\sqrt{\mathfrak{T}},$$

$$T_2^*,\ T_2^{**} = 2\pi\sqrt{\tfrac{1}{3}\mathfrak{T}}$$

ab.

Es entspricht der eben behandelte Fall der Fig. 49a; durchaus ähnliche Formeln sind aber abzuleiten, wenn man gleiche

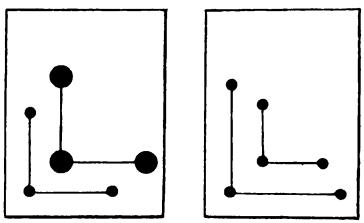


Fig. 49.

Kapazitäten und verschiedene Drähte voraussetzt (Fig. 49b).

§ 6. Sind die Leiter, welche das System bilden, untereinander gleich, so erhalten wir als Charakteristik, nach dem dritten Paragraphen dieser Vorlesung,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^2 + \sum G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'} = 0,$$

jede Linie wird also nach der Koppelung durch ein Doublet ersetzt.

Wie das Doublet aus der einfachen Linie abzuleiten ist, läßt sich im allgemeinen nicht feststellen. In einem besonderen Fall kommt man aber zu einem treffenden Resultat.

Wir betrachten einen Leiter, welcher $m + 1$ untereinander gleiche Kapazitäten und m ebenfalls gleiche Drähte enthält; dabei wird jede Kapazität (mit Ausnahme der letzten und der

ersten) von zwei Drähten getroffen. Besondere Fälle eines solchen Leiters sind in Fig. 42 *a* und *b* ($m = 4$, bzw. $m = 5$) dargestellt. Wir setzen noch voraus, daß die Drähte so lang und dünn sind, daß die Koeffizienten der mutuellen Induktion gegen L vernachlässigt werden dürfen.

Dann nimmt die Charakteristik des Leiters die einfache Form

$$\mathfrak{M}(S) = \begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & S & r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & S & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & S \end{vmatrix} = 0$$

an. Jetzt geben wir dem ersten Leiter einen zweiten durchaus ähnlichen Leiter bei, und setzen voraus, daß die elektrostatischen Wirkungen zu vernachlässigen sind, die elektrodynamischen dagegen von einem einzigen Koeffizienten abhängen, in der Weise, daß

$$M_{\mu,\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu,$$
$$M_{\mu,\mu} = M$$

ist. Es entspricht dies ja einer Annahme, die wir in den letzten Paragraphen gemacht haben.

Die Charakteristik des Systems wird hierdurch zu

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & S & r & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & S & r & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & S & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s \\ s & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & S & r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & r & S & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & r & S & r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & S & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & S \end{vmatrix} = 0,$$

oder, nach leichter Umformung

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix}
S+s & r & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
r & S+s & r & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & r & S+s & r \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots S+s & r & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots r & S+s & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & S-s & r & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & s & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & r & S-s & r & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & s & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & r & S-s & r \ldots 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots r & S-s & r \\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & r & S-s
\end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(S+s) \cdot \mathfrak{M}(S-s) = 0;$$

es ist aber, nach unseren Festsetzungen

$$\begin{cases} S = (R + L D) D + 2 K, \\ s = M D^2, \qquad r = -K, \end{cases}$$

also:

$$S + s = [R + (L + M) D] D + 2 K,$$
$$S - s = [R + (L - M) D] D + 2 K;$$

schreibt man daher die Charakteristik des isolierten Leiters in der Form

$$\mathfrak{M}(L, K) = 0,$$

so wird die Charakteristik des Systems zu

$$\mathfrak{M}(L + M, K) \cdot \mathfrak{M}(L - M, K) = 0.$$

Denken wir uns die Schwingungsperioden des isolierten Leiters durch gewisse Funktionen

$$T_1(L, K), T_2(L, K), \ldots T_m(L, K)$$

ausgedrückt, so können wir gleich die Doublets durch die Formeln

$$\begin{cases} T_1(L + M, K) \\ T_1(L - M, K)' \end{cases} \quad \begin{cases} T_2(L + M, K) \\ T_2(L - M, K)' \end{cases} \cdots \begin{cases} T_m(L + M, K) \\ T_m(L - M, K) \end{cases}$$

bestimmen.

Läßt man endlich die erste Kapazität auf die erste, die zweite auf die zweite usw. wirken, wie im vierten und fünften Paragraphen dieser Vorlesung geschehen, so wird es sich bald durch eine der vorigen ganz ähnliche Rechnung zeigen, daß der Charakteristik

$$\mathfrak{M}(L, K) = 0$$

die Gleichung

$$\mathfrak{M}(L + M, K + H) \cdot \mathfrak{M}(L - M, K - H) = 0$$

entspricht.

Die Linien des einfachen Leiters werden daher durch folgende Doublets ersetzt

$$\left\{ \begin{matrix} T_1(L+M,K+H) \\ T_1(L-M,K-H) \end{matrix} \right.' \left\{ \begin{matrix} T_2(L+M,K+H) \\ T_2(L-M,K-H) \end{matrix} \right.'' \cdots \left\{ \begin{matrix} T_m(L+M,K+H) \\ T_m(L-M,K-H) \end{matrix} \right.^{\cdot}$$

§ 7. Ohne weitere Rechnungen können wir jetzt die Schwingungsperioden der Systeme angeben, welche in Fig. 50

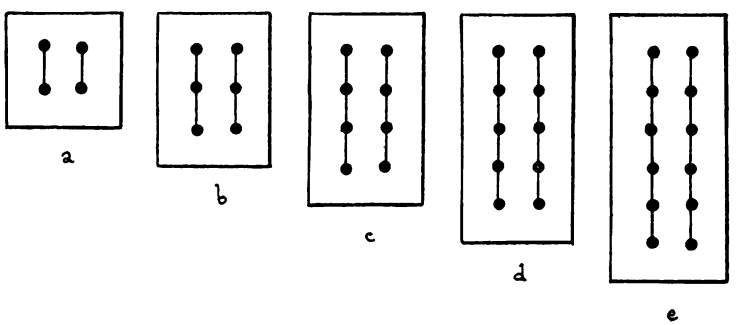


Fig. 50.

dargestellt sind. Wir brauchen dazu uns nur auf die Resultate zu berufen, die in der elften Vorlesung (§ 2, 3, 4 und 6) erhalten wurden.

Es emittiert also das System 50*a* ein Doublet mit den Perioden

$$\begin{cases} T^* = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{L+M}{K+H}}, \\ T^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{L-M}{K-H}}; \end{cases}$$

System 50*b* sendet zwei Doublets aus, d. h.

$$\left\{\begin{array}{l} T_1^{*} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L+M}{K+H}}, \\ T_1^{**} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L-M}{K-H}}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} T_2^{*} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{3}\dfrac{L+M}{K+H}}, \\ T_2^{**} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{3}\dfrac{L-M}{K-H}}; \end{array}\right.$$

dem System 50*c* kommen drei Doublets zu

$$\left\{\begin{array}{l} T_1^{*} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}\dfrac{L+M}{K+H}}, \\ T_1^{**} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}\dfrac{L-M}{K-H}}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} T_2^{*} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{2}\dfrac{L+M}{K+H}}, \\ T_2^{**} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{2}\dfrac{L-M}{K-H}}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} T_3^{*} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\dfrac{L+M}{K+H}}, \\ T_3^{**} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\dfrac{L-M}{K-H}}; \end{array}\right.$$

Systeme 50*d* und 50*e* senden endlich vier bzw. fünf Doublets aus, deren Perioden nach den Formeln des sechsten Paragraphen der elften Vorlesung leicht zu berechnen sind.

§ 8. Die Bestimmung der Schwingungsperioden für ein System von drei Leitern bietet keine besondere Schwierigkeit dar.

Wir nehmen an, daß der erste Bestandteil m Drähte, der zweite r, der dritte endlich s Drähte hat, und schreiben die charakteristischen Gleichungen in der Form

$$\mathfrak{M} = 0,$$
$$\mathfrak{N} = 0,$$
$$\mathfrak{S} = 0;$$

dann wird offenbar die Charakteristik des zusammengesetzten Systems zu

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \mathfrak{M} & Q_{1,2} & Q_{1,3} \\ Q_{2,1} & \mathfrak{N} & Q_{2,3} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & \mathfrak{S} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Schreibart ist eine symbolische, und die Größen Q sind als Matrizes zu verstehen, welche von lauter Gliedern der Form $D^2 M_{\mu,\nu}$ gebildet werden; dabei sind μ und ν Kennzeichen für Drähte, welche zu verschiedenen Leitern gehören.

Beim Entwickeln erhält man, wie leicht zu ersehen

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{S} + \sum G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'},$$

wo die G dieselbe Bedeutung wie vorher haben.

Wir dürfen also schließen, daß ein System von drei Leitern, welche nicht allzunah nebeneinander liegen, ein Spektrum emittiert, das dieselbe Zahl von Linien enthält, die die Spektren enthalten, welche die drei Leiter gesondert auszusenden vermögen, dabei ist die Lage der Linien eine kaum veränderte.

§ 9. Sind die drei Leiter, die das System bilden, untereinander gleich, so wird ganz einfach

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{M}^3 + \sum G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'};$$

es emittiert hiernach ein derartiges System eine Reihe von Triplets.

Um ein besonderes Beispiel zu berechnen, betrachten wir noch einmal das System, das im zweiten Paragraphen dieser Vorlesung behandelt wurde, und setzen ausdrücklich $a = 3$.

Dann wird die y-Gleichung [die Gleichung (*)] zu

$$\begin{vmatrix} -\frac{2y}{C} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{1,2} & -\frac{2y}{C} & M_{2,3} \\ M_{1,3} & M_{2,3} & -\frac{2y}{C} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$y^3 - \tfrac{1}{4}(M^2_{1,2} + M^2_{1,3} + M^2_{2,3})\,C^2 y - \tfrac{1}{4} M_{1,2} M_{1,3} M_{2,3} C^3 = 0.$$

Setzen wir noch, wie es aus Fig. 51 zu entnehmen ist

$$M_{1,2} = M_{2,3} = M,$$

und schreiben, der Einfachheit halber

$$M_{1,3} = m,$$

so erhält man

$$y^3 - \tfrac{1}{4}(m^2 + 2M^2)\, C^2 y - \tfrac{1}{4} m M^2 C^3 = \left(y + \frac{mC}{2}\right)\left(y^2 - \frac{mC}{2} y - \frac{M^2 C^2}{2}\right) = 0.$$

Hiernach sendet unser System ein Triplet aus mit den Eigenperioden

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{CL}{2} + y_1},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{CL}{2} + y_2},$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{CL}{2} + y_3},$$

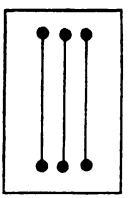


Fig. 51.

und es ist dabei

$$y_1 = -\frac{mC}{2},$$

$$y_2 = \frac{C}{4}\left(m + \sqrt{m^2 + 8M^2}\right),$$

$$y_3 = \frac{C}{4}\left(m - \sqrt{m^2 + 8M^2}\right)$$

zu setzen.

§ 10. Die Sätze, die wir im dritten und achten Paragraphen dieser Vorlesung bewiesen haben, kann man sehr leicht verallgemeinern und für Systeme von a Leitern formulieren.

Sind die charakteristischen Gleichungen der einzelnen Bestandteile in der Form

$$\mathfrak{M}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1.2 \ldots a)$$

gegeben, so dürfen wir die Charakteristik des Systemes nach folgender symbolischen Schreibart bilden

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \mathfrak{M}_1 & Q_{1,2} & Q_{1,3} \ldots Q_{1,a} \\ Q_{2,1} & \mathfrak{M}_2 & Q_{2,3} \ldots Q_{2,a} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{a,1} & Q_{a,2} & Q_{a,3} \ldots \mathfrak{M}_a \end{vmatrix} = 0.$$

Hier sind die Q wieder Matrizes von Gliedern mit der Form $D^2 M_{\mu,\nu}$, und es stellt gewissermaßen $Q_{\alpha,\beta}$ die Wirkung dar, die der β-te Leiter auf den α-ten ausübt. $Q_{\alpha,\beta}$ hat so viele Horizontalreihen wie der α-te Leiter Drähte hat, und so viele Vertikalreihen wie der β-te Leiter Drähte besitzt.

Beim Entwickeln wird offenbar

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_a + \sum G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'},$$

und für ein System von gleichen Leitern

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_a^a + \sum G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'};$$

wir dürfen also fesstellen, daß

1. ein System von a Leitern ein Spektrum emittiert, in dem eben die Linien vorkommen, die die Bestandteile gesondert auszustrahlen vermögen; freilich werden dabei die Lagen ein wenig verschoben;

2. ein System von a gleichen Leitern ein Spektrum emittiert, das so viele Banden hat wie im Spektrum des gesonderten Leiters Linien vorhanden sind; dabei entsteht die Bande dadurch, daß jede Linie durch a sehr naheliegende Linien ersetzt wird.[1])

§ 11. Ein System von Systemen wird nach denselben Regeln wie ein System von einfachen Leitern zu behandeln sein; und vom analytischen Standpunkte aus decken sich ja die beiden Fragen miteinander. In praktischen Fällen unterscheidet man aber das eine System von dem anderen dadurch, daß im ersten die Koeffizienten der mutuellen Induktion für Drähte, welche zu verschiedenen Leitern gehören, von mehreren Größenordnungen sein können, während in einem Systeme von einfachen Leitern die genannte Größenordnung eine einzige ist.

Die Charakteristik des Systems ist durch die charakteristischen Gleichungen der Bestandteile ganz wie vorher zu bilden; und die Sätze, die wir im letzten Paragraphen ausgesprochen haben, behalten offenbar für Systeme von Systemen ihre volle Gültigkeit.

---

[1]) Ganz ähnlich lautende Sätze würde man, unter Berücksichtigung der elektrostatischen Wirkungen beweisen können.

Vierzehnte Vorlesung.

Entwurf einer elektromagnetischen Theorie der Spektralanalyse.

§ 1. Spektren zusammengesetzter Körper. — § 2. Bandenspektren und Verbreiterung der Spektrallinien. — § 3. Spektren von isomeren Verbindungen. — § 4—5. Zulässige Bilder, welche einem gegebenen Spektrum entsprechen. — § 6. Kurze und lange Linien; Dissoziation der Elemente. — § 7—8. Die Serien von Kayser und Runge. — § 9. Doubletserien. — § 10. Zur Struktur von chemisch verwandten Körpern.

§ 1. Die Bemerkung, die wir gerade am Ende der letzten Vorlesung gemacht haben, wonach die Systeme von Systemen mehrere Eigenschaften besitzen, welche den Systemen von einfachen Leitern eigen sind, gestattet uns, Bilder für die zusammengesetzten Moleküle anzugeben, ohne für den Augenblick entscheiden zu müssen, ob die materiellen Atome entweder als einfache Leiter oder als komplizierte Systeme aufzufassen sind.

Vorläufig, und der Kürze halber, betrachten wir also die Atome als einfache Leiter, und die Moleküle als daraus gebildete Systeme.

Nach dem zehnten Paragraphen der vorigen Vorlesung darf man hieraus schließen, daß das Spektrum eines zusammengesetzten Körpers in der Weise entsteht, daß die Spektren seiner Bestandteile übereinandergelagert und ein wenig deformiert werden.

Hierin liegt wahrscheinlich der Grund, weshalb über die Natur der Spektra zusammengesetzter Moleküle keine Einstimmigkeit herrscht. Besitzen die Atome sehr verschiedene Eigenschwingungen, so wird es leicht sein, im Spektrum des Moleküles die Spektren der einzelnen Elemente zu erkennen; in komplizierten Fällen trifft das aber nicht mehr zu.

Ganz richtig ist also die Meinung von Prof. Kayser, wonach die Regelmäßigkeiten, die Grünwald und Ciamician bei einigen Verbindungsspektren herauszufinden meinten, ganz willkürlich erscheinen; damit ist es aber nicht ausgeschlossen, daß in eben jenen Ausführungen gewisse der Wahrheit entsprechende Züge enthalten sein können. Willkürlich heißt ja nicht dasselbe wie falsch.

Es glaubte z. B. Grünwald gefunden zu haben, daß das Spektrum des Wasserdampfes aus den Spektren des Wasserstoffs und Sauerstoffs abzuleiten ist, wenn die Perioden des ersten Spektrums mit $\frac{1}{2}$, die des zweiten mit $\frac{2}{3}\frac{3}{2}$ bzw. $\frac{5}{8}$ multipliziert werden. Wäre die Regel eine durchaus grundlose, so hätte man durch sie nicht eine ganze Reihe von ultravioletten Linien voraus berechnen können, die nachher von Liveing und Dewar bestätigt worden sind. Übrigens zeigt das System der Fig. 49 *a* eine der Grünwaldschen ganz ähnliche Regelmäßigkeit.

Die Formeln, die wir dafür aufgestellt haben (XIII. Vorl. § 5) sind leider sehr kompliziert; unter gewissen Annahmen werden sie aber einfach und durchsichtig.

Wir setzen voraus, daß K_1 und K_2 voneinander verschieden sind und betrachten

$$\varepsilon = \frac{M}{L}, \qquad \alpha_1 = \frac{H}{K_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{H}{K_2}$$

als sehr kleine Größen, und zwar als so kleine, daß dritte und höhere Potenzen zu vernachlässigen sind.

Dann erhält man leicht

$$\sqrt{\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{L}{K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

und

$$\sqrt{\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{L}{K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

je nachdem vor der Wurzel, im Nenner von $\mathfrak{T}$, das $+$ bzw. das $-$ Zeichen angenommen wird.

Damit werden die Schwingungsperioden zu

$$T_1^* = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

$$T_1^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

$$T_2^* = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

$$T_2^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

oder, wenn man der Übersichtlichkeit halber die Definitionen

$$\theta_1 = \frac{K_1(\varepsilon-\alpha_1)^2}{2(K_1-K_2)}, \qquad \theta_2 = \frac{K_2(\varepsilon-\alpha_2)^2}{2(K_2-K_1)},$$

$$T_1^{(1)} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K_1}}, \qquad T_1^{(2)} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K_2}},$$

$$T_2^{(1)} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3K_1}}, \qquad T_2^{(2)} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3K_2}}$$

noch einführt, zu

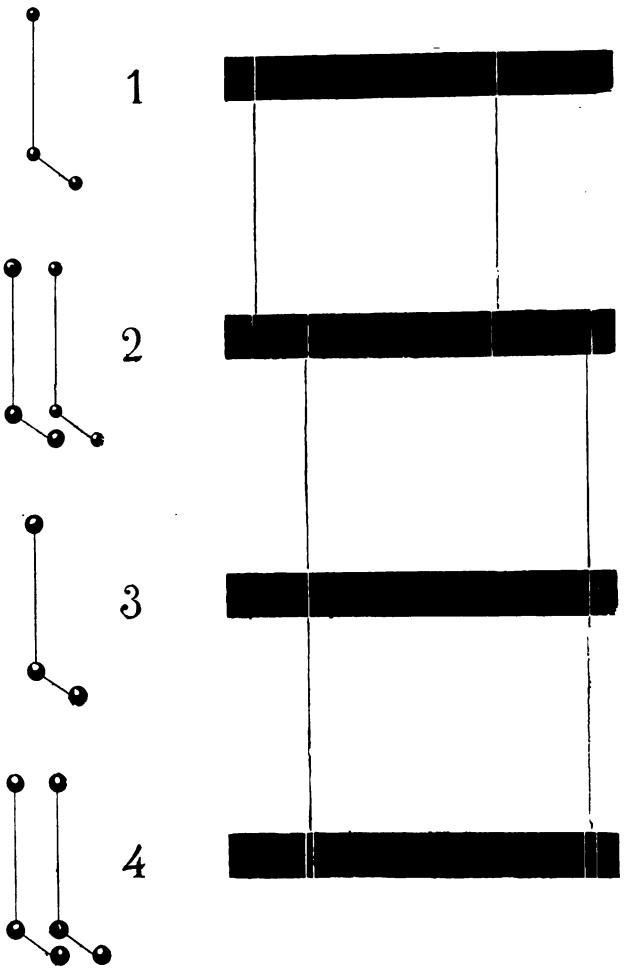


Fig. 52.

$$T_1^* = T_1^{(1)}(1 - \theta_1),$$
$$T_1^{**} = T_1^{(2)}(1 - \theta_2),$$
$$T_2^* = T_2^{(1)}(1 - \theta_1),$$
$$T_2^{**} = T_2^{(2)}(1 - \theta_2).$$

Hier bedeuten aber $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $T_1^{(2)}$ u. $T_2^{(2)}$ die Schwingungsperioden, welche den isolierten Bestandteilen entsprechen (XI. Vorl. § 3). Aus diesen Formeln kann man nun dieselben Folgerungen ziehen, welche in der siebenten Vorlesung (§ 5) für ein System von zwei Pendeln gezogen wurden. Wie dort ein mechanisches Bild, so finden hier die Versuche von Lockyer und insbesondere die schönen Resultate von Bunsen ein zweckmäßiges elektromagnetisches Bild (man vergleiche hierzu die I. Vorl. § 8).

Die beschriebenen Verhältnisse wollen wir noch durch ein Zahlenbeispiel erläutern; wir berechnen dazu die Schwingungsperioden (bzw. Wellenlängen) für das System der Fig. 52 (2), welches aus den Leitern 52 (1) und 52 (3) zusammengesetzt ist.

Dabei nehmen wir an, daß die Drähte eine Länge von 30 cm und eine Dicke von 0,03 cm haben; die Kapazitäten sollen leitende Kugeln sein, welche für Leiter (1) einen Durchmesser von 3 cm und für Leiter (3) einen solchen von 4 cm haben.

Den Abstand zwischen den parallel laufenden Drähten im System (2) bestimmen wir zu 10 cm.

Hieraus erhält man folgende Wellenlängen[1])

(1)		76,9		132,2	
(2)	76,1		89,3	131,9	154,7
(3)		88,8		153,8	

und daher die Normalspektren, welche in der Figur den Leitern, bzw. dem System gegenüber dargestellt sind.

---

[1]) Die Ausdrücke für die Potentialskoeffizienten sind aus Maxwells Werk zu entnehmen; den Koeffizienten der mutuellen Induktion kann man durch folgende Rechnung bestimmen. Mit den Bezeichnungen der Fig. 53 (1), wird nämlich

$$\frac{M}{A^2 \mu} = \int_0^{l_1} dx_1 \int_{a + l_1}^{a + l_1 + l_2} \frac{dx_2}{\sqrt{A^2 + (x_2 - x_1)^2}},$$

und der Reihe nach

§ 2. Die Entstehung von Bandenspektren, sowie die Erscheinungen, welche durch Wärme und Druck hervorgerufen werden, sind nach dem Satz, der in der vorigen Vorlesung (§ 10) bewiesen wurde, leicht zu erklären.

$$\frac{M}{A^2\mu} = \int_0^{l_1} dx_1 \log \frac{a + l_1 + l_2 - x_1 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1 + l_2 - x_1)^2}}{a + l_1 - x_1 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1 - x_1)^2}},$$

$$= l_1 \log \frac{a + l_1 + l_2 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1 + l_2)^2}}{a + l_1 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1)^2}}$$

$$+ l_2 \log \frac{a + l_1 + l_2 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1 + l_2)^2}}{a + l_2 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_2)^2}}$$

$$+ a \log \frac{\left[a + \sqrt{\Delta^2 + a^2}\right]\left[a + l_1 + l_2 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1 + l_2)^2}\right]}{\left[a + l_1 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1)^2}\right]\left[a + l_2 + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_2)^2}\right]}$$

$$+ \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1)^2} + \sqrt{\Delta^2 + (a + l_2)^2} - \sqrt{\Delta^2 + a^2} - \sqrt{\Delta^2 + (a + l_1 + l_2)^2}.$$

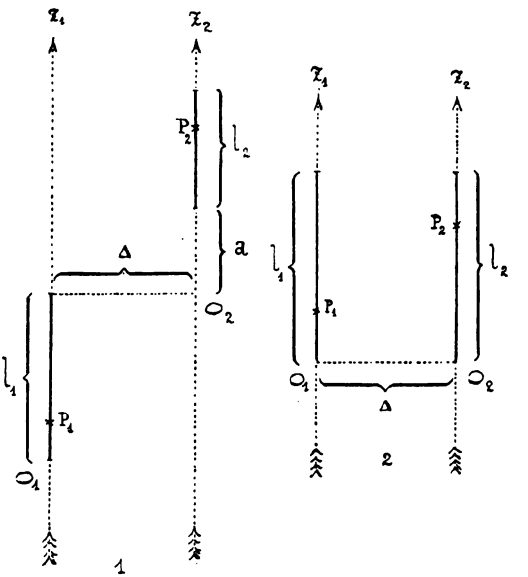


Fig. 53.

Werden die Drähte untereinander gleich, und stehen sie auf derselben Höhe wie in Fig. 53 (2), so hat man einfach

$$\frac{M}{A^2\mu} = 2\,l \log \frac{l + \sqrt{\Delta^2 + l^2}}{\Delta} + 2\,\Delta - 2\sqrt{\Delta^2 + l^2}$$

Es ist einleuchtend, daß, wenn das Molekül komplizierter wird, wie dies für tropfbar flüssige und feste Körper der Fall ist, die einfachen Linien durch Banden ersetzt werden müssen; und es ist wiederum klar, daß die mutuelle Wirkung naheliegender Moleküle die Verbreiterung der charakteristischen Linien verursachen kann.

Ist in der Tat ein System gegeben, welches aus a gleichen Systemen (Molekülen) besteht, und lassen wir es in einem ausgedehnten Raume zerstreut liegen, um nachher die Grenzen zusammenzuschieben, so muß auch seine Charakteristik entsprechende Änderungen erfahren.

Im Anfangszustand, wenn die Abstände zwischen zwei irgendwie herausgegriffenen Bestandteilen sehr groß sind, muß auch das zweite Glied auf der linken Seite der Charakteristik gegenüber dem ersten zu vernachlässigen sein.

Es bleibt hiernach das erste Glied übrig, und beim Nullsetzen von diesem erhalten wir eben ein Spektrum, das mit dem Eigenspektrum der isolierten Bestandteile zusammenfällt.

Nachher, bei abnehmenden Abständen, nimmt das zweite Glied an Größe zu, und jede Linie wird zu einer Bande, welche aus a sehr naheliegenden Linien besteht.

Werden die Einzelsysteme (Moleküle) immer mehr nebeneinander gedrängt, so müssen auch die Banden sich allmählich verbreitern.

§ 3. Der Satz, den wir bewiesen haben, wonach der Grad der Charakteristik für ein zusammengesetztes System durch die Formel

$$\Gamma = \sum_1^a (p_a + m_a) - a$$

zu berechnen ist (XIII. Vorl. § 1), scheint mit dem wohlbekannten Erfahrungsergebnis, daß isomere Körper manchmal sehr verschiedene Absorptionsspektren zeigen, nicht leicht in Einklang zu bringen (man vergleiche die I. Vorl. § 10).

---

zu setzen. Fallen die Drähte auf dieselbe Gerade (Fig. 41), so wird

$$\frac{M}{A^2\mu} = l_1 \log \frac{a + l_1 + l_2}{a + l_1} + l_2 \log \frac{a + l_1 + l_2}{a + l_2} + a \log \frac{a(a + l_1 + l_2)}{(a + l_1)(a + l_2)},$$

was mit einem in der elften Vorlesung (§ 5, Fußnote) abgeleiteten Resultate sich deckt.

Doch ist die Schwierigkeit keine prinzipielle. Denn es bestimmt unser Satz für den betreffenden Grad eine obere Grenze, und es bleibt damit nicht ausgeschlossen, daß einige Wurzeln zu mehrfachen Wurzeln werden, was die Freiheitsgrade der Bewegung herabsetzen würde.

Um darüber klar zu werden, unterziehen wir das System, das im neunten Paragraphen der vorigen Vorlesung berechnet wurde, einer näheren Betrachtung.

Steht das dritte Element auf den anderen senkrecht (Fig. 54), so haben wir all die Q, die das Kennzeichen 3 enthalten, gleich Null zu setzen; es wird daher

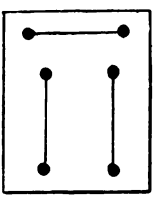
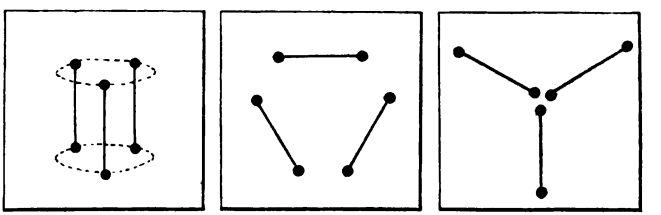


Fig. 54.

$$\begin{vmatrix} S & s & 0 \\ s & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} S & s \\ s & S \end{vmatrix} = 0.$$

Hiernach strahlt unser System wieder drei Linien aus; sie sind aber nicht mehr die nämlichen wie vorher.

Die Verhältnisse werden noch einfacher, wenn die drei Leiter in der Weise zu einem System verbunden sind, daß die Koeffizienten der mutuellen Induktion einen gemeinsamen Wert erhalten. Dies können wir durch eine zylindrische (Fig. 55a), sowie durch eine dreieckige (Fig 55b), und außer-



a b c

Fig. 55.

dem noch durch eine sternförmige (Fig. 55c) Anordnung verwirklichen.

Dann wird

$$Q_{1,2} = Q_{2,1} = Q_{2,3} = Q_{3,2} = Q_{1,3} = Q_{3,1} = M D^2 = s,$$

also:

$$\begin{vmatrix} S & s & s \\ s & S & s \\ s & s & S \end{vmatrix} = (S - s)^2 (S + 2s) = 0 .$$

Es sendet hierbei das System nur zwei Linien aus.

Stehen endlich die drei Leiter aufeinander senkrecht (Fig. 56), so hat man

$$Q_{1,2} = Q_{2,1} = Q_{2,3} = Q_{3,2} = Q_{1,3} = Q_{3,1} = 0$$

zu setzen, was die Charakteristik

$$\begin{vmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{vmatrix} = S^3 = 0$$

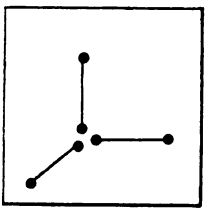


Fig. 56.

liefert. Und somit reduziert sich das Spektrum auf eine einzige Linie.

§ 4. Für die materiellen Atome sind, wie bemerkt, zwei elektromagnetische Modelle möglich, welche a priori dieselbe Zulässigkeit besitzen. Wir können nämlich annehmen, daß diese Gebilde durch einfache Leiter darzustellen sind, oder daß sie vielmehr als zusammengesetzte Systeme zu betrachten sind.

Dabei ist es leicht zu beweisen, daß das Bild keineswegs ein eindeutiges sein kann; die Unbestimmtheit der Aufgabe nimmt sogar zu, je größer die Zahl der Linien ist, die in dem entsprechenden Spektrum vorkommen.

Hierin liegt wahrscheinlich der Grund, weshalb die Spektroskopie bis jetzt keine befriedigenden Angaben zu liefern vermochte über den Bau der materiellen Atome.

Wir wollen zunächst das einfachste Bild betrachten und die Atome als Leiter uns denken. Dann ist es leicht zu beweisen, wenn das Gebilde ein Spektrum mit n Linien aussenden soll, daß dann der Aufgabe n verschiedene Lösungen zukommen.

Wir haben ja gesehen (XI. Vorl. § 1), daß einem Leiter, der p Kapazitäten und m Drähte enthält, eine Charakteristik entspricht mit dem Grade

$$\gamma = p + m - 1 .$$

Kommen nun im Spektrum n Linien vor, so hat man

(*) $$n = \frac{\gamma}{2} = \frac{p+m-1}{2},$$

also

(**) $$p + m = 2k + 1$$

zu setzen, wo k eine ganze Zahl ist.

Der Bedingung können wir daher Genüge leisten, indem wir für p und m ein Wertepaar aus folgender Tabelle entnehmen.

p	m
2	$(2k+1)-2$
3	$(2k+1)-3$
4	$(2k+1)-4$
...	.....
r	$(2k+1)-r$

Das letzte Paar ist dadurch zu bestimmen, daß man bedenkt, daß die kleinste Zahl für die Drähte erreicht ist, wenn die erste Kapazität mit der zweiten, die zweite mit der dritten, usw., die vorletzte mit der letzten einfach und direkt verbunden werden.

In diesem besonderen Falle ist

$$r - 1 = (2k + 1) - r,$$

also:

$$\text{½} = r - 1.$$

Der möglichen Lösungen, welche aus der Tabelle folgen, sind aber so viele wie die Horizontalzeilen, d. h.

$$r - 1,$$

oder, nach der letzten Gleichung

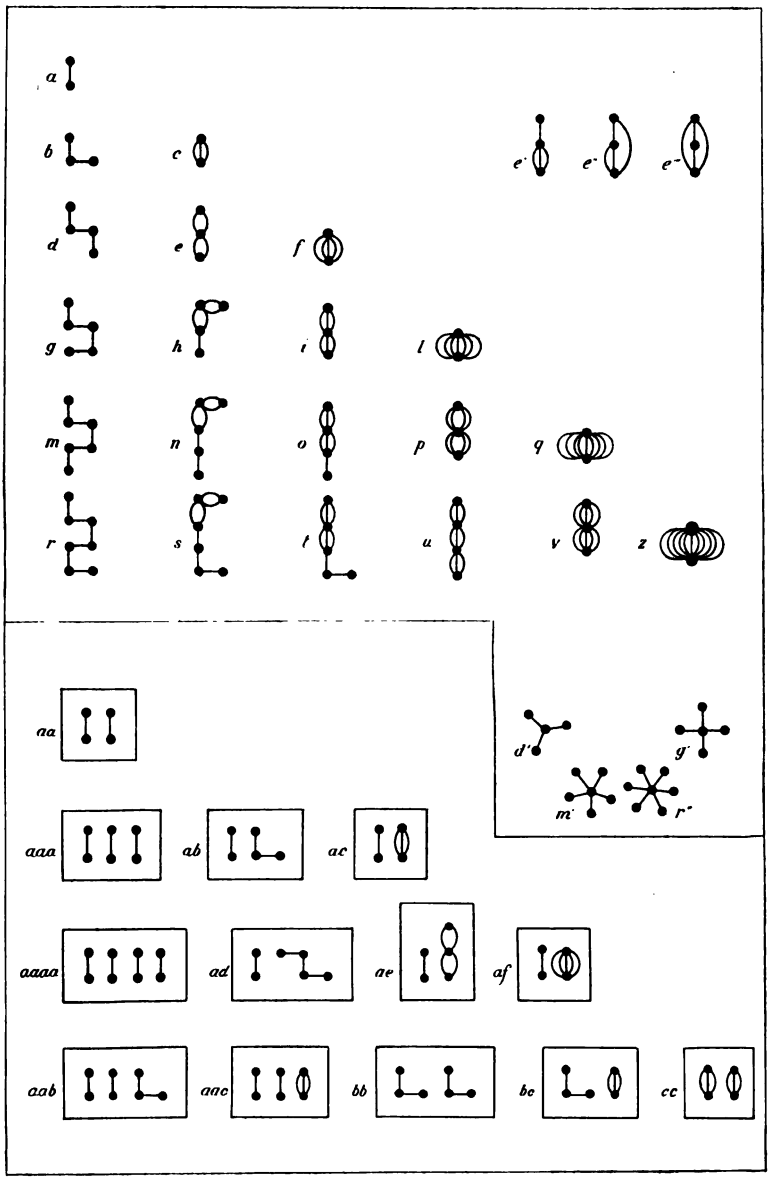
$$k.$$

Beim vergleichen von (*) und (**) wird aber

$$k = \frac{\gamma}{2} = n,$$

wie zu beweisen war.

Es gibt in der Tat einen einzigen Leiter mit einer Schwingungsperiode (Tafel, *a*); dagegen sind zwei Leiter mit zwei Eigenperioden möglich (Tafel, *b*, *c*), und der Reihe nach drei Leiter mit drei Freiheitsgraden (*d*, *e*, *f*) bzw. vier mit


a
b
c
e'
e''
e'''
d
e
f
g
h
i
l
m
n
o
p
q
r
s
t
u
v
z
aa
d'
g'
m'
r''
aaa
ab
ac
aaaa
ad
ae
af
aab
aac
bb
bc
cc

vier (g, h, i, l), fünf mit fünf (m, n, o, p, q), sechs mit sechs (r, s, t, u, v, z) usw., zu bilden.

Für das Eisenatom gibt es also, nach dieser Art der Darstellung, etwa viertausend zulässige Bilder.

Die Mannigfaltigkeit der Bilder ist sogar eine noch größere, wenn wir als verschieden zwei Leiter betrachten, welche nur durch die Art der Verbindungen (nicht etwa nach den Zahlen m und p) zu unterscheiden sind. Dann gesellen sich z. B. dem Leiter e (Tafel) noch die Leiter e', e'' und e''' bei. Auf ähnliche Weise dürfen die Leiter d, g, m und r auch die sternförmige Struktur d', g', m' und r' annehmen.

§ 5. Nach der Theorie, welche in der vorigen Vorlesung (§ 1) dargestellt wurde, kann man aber ein Spektrum mit n Linien, statt aus einem einzigen Leiter, aus einem Leitersysteme erhalten, wenn nur den Spektren der Bestandteile solche Anzahlen von Linien

$$\alpha, \beta \ldots \omega$$

zukommen, daß

$$\alpha + \beta + \ldots + \omega = n$$

wird.

Spektren mit zwei, bzw. drei, vier, fünf und sechs Linien sind also aus folgenden Systemen zu erhalten.[1])

2 Linien .... $(a\,a)$;

3 Linien .... $(a\,a\,a)$, $(a\,b)$, $(a\,c)$;

4 Linien .... $(a\,a\,a\,a)$, $(a\,a\,b)$, $(a\,a\,c)$, $(a\,d)$, $(a\,e)$, $a\,f)$, $(b\,b)$, $(b\,c)$, $(c\,c)$;

---

[1]) Die Systeme mit zwei, drei und vier Spektrallinien sind in der Tafel dargestellt.

Eine naheliegende Methode für die Berechnung der Anzahl (N) der Systeme, welche ein Spektrum mit n Linien aussenden, ist die folgende.

Wird n in jeder möglichen Weise in ganze Glieder, nach der Formel

$$(*) \qquad n = \alpha + \beta + \ldots + \omega$$

aufgelöst, und bildet man jedesmal das Produkt

$$\nu_\mu = \alpha \cdot \beta \ldots \omega,$$

so ist offenbar

$$N = \Sigma \nu_\mu$$

die gesuchte Anzahl.

Es ist aber zu bemerken, daß nach dieser Art des Rechnens überflüssige Glieder eingeführt werden können, und das kommt dann vor,

5 Linien .... $(a\,a\,a\,a\,a)$, $(a\,a\,a\,b)$, $(a\,a\,a\,c)$, $(a\,a\,d)$, $(a\,a\,e)$, $(a\,a\,f)$, $(a\,g)$, $(a\,h)$, $(a\,i)$, $(a\,l)$, $(a\,b\,b)$, $(a\,b\,c)$, $(a\,c\,c)$, $(b\,d)$, $(b\,e)$, $(b\,f)$, $(c\,d)$, $(c\,e)$, $(c\,f)$;

---

wenn auf der rechten Seite, in einer Gleichung (*), zwei oder mehrere Glieder untereinander gleich werden (die Einheit bleibt dabei ausgeschlossen).

Die Anzahl N' der überflüssigen Glieder muß man nun von der Summe $\Sigma\nu_\mu$ abziehen, wodurch man endlich die strenge Formel erhält

$$N = \Sigma\nu_\mu - N'.$$

Ist z. B. $n = 2$, so haben wir für n offenbar nur die eine mögliche Entwicklung

$$n = 1 + 1,$$

daher

$$\nu = 1,$$

und

$$N = 1.$$

Für $n = 3$ wird

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 2, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ N &= 3. \end{aligned}$$

Für $n = 4$ ist

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 1 + 2, \\ &= 1 + 3, \\ &= 2 + 2, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ \nu_3 &= 3, \\ \nu_4 &= 4, \qquad \Sigma\nu_\mu = 10; \end{aligned}$$

aus dem letzten Glied haben wir aber die Kombinationen von zwei Dingen zu je zwei abzuziehen, also:

$$N' = \binom{2}{2} = 1;$$

und daher

$$N = \Sigma\nu_\mu - N' = 9.$$

Für $n = 5$ wird

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 1 + 1 + 2, \\ &= 1 + 1 + 3, \\ &= 1 + 4, \\ &= 1 + 2 + 2, \\ &= 2 + 3, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ \nu_3 &= 3, \\ \nu_4 &= 4, \\ \nu_5 &= 4, \\ \nu_6 &= 6, \qquad \Sigma\nu_\mu = 20; \end{aligned}$$

6 Linien .... $(a\,a\,a\,a\,a\,a)$, $(a\,a\,a\,a\,b)$, $(a\,a\,a\,a\,c)$, $(a\,a\,a\,d)$, $(a\,a\,a\,e)$, $(a\,a\,a\,f)$, $(a\,a\,g)$, $(a\,a\,h)$, $(a\,a\,i)$, $(a\,a\,l)$, $(a\,a\,b\,b)$, $(a\,a\,b\,c)$, $(a\,a\,c\,c)$, $(a\,m)$, $(a\,n)$, $(a\,o)$, $(a\,p)$, $(a\,q)$, $(a\,b\,d)$, $(a\,b\,e)$, $(a\,b\,f)$, $(a\,c\,d)$, $(a\,c\,e)$, $(a\,c\,f)$, $(b\,b\,b)$, $(b\,b\,c)$, $(b\,c\,c)$, $(c\,c\,c)$, $(d\,d)$, $(e\,e)$, $(f\,f)$, $(d\,e)$, $(d\,f)$, $(e\,f)$, $(b\,g)$, $(b\,h)$, $(b\,i)$, $(b\,l)$, $(c\,g)$, $(c\,h)$, $(c\,i)$, $(c\,l)$.

Setzen wir die (unabhängigen) Lösungen, die für den isolierten Leiter gefunden wurden, mit den neu erhaltenen zusammen, so können wir folgende Tabelle bilden:

---

bei dem fünften Glied hat man aber nochmals $\binom{4}{2}$ abzuziehen, also

$$N' = \binom{2}{2} = 1;$$

und daher

$$N = \Sigma\nu_\mu - N' = 19.$$

Für $n = 6$ endlich wird

$$\begin{aligned} n &= 1+1+1+1+1+1, \\ &= 1+1+1+1+2, \\ &= 1+1+1+3, \\ &= 1+1+4, \\ &= 1+1+2+2, \\ &= 1+5, \\ &= 1+2+3, \\ &= 2+2+2, \\ &= 2+4, \\ &= 3+3, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ \nu_3 &= 3, \\ \nu_4 &= 4, \\ \nu_5 &= 4, \\ \nu_6 &= 5, \\ \nu_7 &= 6, \\ \nu_8 &= 8, \\ \nu_9 &= 8, \\ \nu_{10} &= 9, \qquad \Sigma\nu_\mu = 50; \end{aligned}$$

bei dem fünften bzw. dem achten und zehnten Glied hat man nun der Reihe nach $\binom{2}{2}$, $4\binom{2}{2}$ und $\binom{3}{2}$ abzuziehen, wodurch man

$$N' = 1 + 4 + 3 = 8,$$

und daher

$$N = \Sigma\nu_\mu - N' = 42$$

erhält.

Anzahl der Spektrallinien	Lösungen des Problems		
	Isolierte Leiter	Leitersysteme	Gesamtzahl
1	1	0	1
2	2	1	3
3	3	3	6
4	4	9	13
5	5	19	24
6	6	42	48

Hiernach ist die Unbestimmtheit des Problems eine zunehmende, und zwar eine rasch zunehmende, wenn die Zahl der Spektrallinien ebenfalls zunimmt.

Die Ableitung der feinen Struktur der Atome aus der Betrachtung der charakteristischen Spektren dürfen wir also als eine aussichtslose Aufgabe bezeichnen; um so mehr, da das Problem immer unbestimmt bleibt, wenn auch die Verhältnisse der Wellenlängen gegeben sind.[1])

§ 6. Nachdem diese Sätze einmal gefunden wurden, läßt sich jetzt ein Weg einschlagen zur Bestimmung der Bilder, welche für gewisse Atome als zulässig zu betrachten sind.

---

[1]) Leiter b (Tafel) sendet bekanntlich ein Spektrum aus mit den Schwingungsperioden

$$T_1 = 2\pi\sqrt{CL}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{CL}{3}};$$

dem Systeme $(a\,a)$ kommen dagegen, mit leicht verständlichen Bezeichnungen, die Perioden

$$T'_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma(\lambda+\mu)}{2}}, \qquad T'_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma(\lambda-\mu)}{2}}$$

zu.

Die Spektren decken sich also miteinander, wenn

$$(*) \qquad \begin{cases} 2\,CL = \gamma(\lambda+\mu), \\ 2/3\cdot CL = \gamma(\lambda-\mu) \end{cases}$$

ist; es folgt aber

$$4/3\cdot CL = \gamma\lambda, \qquad 2/3\cdot CL = \gamma\mu,$$

also:

$$\mu = \frac{\lambda}{2},$$

womit, aus (*)

$$\gamma\lambda = 4/3\,.\,CL$$

sich ableiten läßt. Den Bedingungen kann man daher genügen, und es gibt sogar eine einfache Unendlichkeit von zulässigen Lösungen.

Durch eine physikalische (experimentelle) Untersuchung hat man zuerst die Frage zu entscheiden, ob das schwingende Gebilde als ein zusammengesetztes System oder als ein einziger Leiter aufzufassen ist. Denn damit nimmt die Unbestimmtheit des Problems in ganz besonderer Weise ab. Wäre z. B. ein Spektrum mit 6 Linien gegeben, so hätten wir *a priori* für den Bau des entsprechenden Gebildes 48 mögliche Fälle der Reihe nach zu betrachten. Wenn aber einmal bewiesen ist, daß das System aus zwei Leitern mit je drei Eigenschwingungen besteht, so bleiben für jeden Bestandteil nur drei zulässige Bilder übrig.

Seit vielen Jahren, allerdings von theoretischen Anschauungen unabhängig, hat nun Sir N. Lockyer die erstere Aufgabe zu lösen versucht (I. Vorl. § 5). Seine Resultate sind nach unserer Theorie leicht zu erklären; bzw. wird es uns leicht, gewisse Fragen zu entscheiden, welche Lockyer unberührt gelassen hat.

Nach Fig. 6 sind die Spektrallinien der Metalle im elektrischen Funken, unabhängig davon, daß sie lang oder kurz sein können, immer doch absolut gerade Linien. Dies ist aber ein Beweis dafür, daß, wenn auch in einer bestimmten Gegend des Funkens gewisse Schwingungen nicht mehr zur Erregung kommen, die Perioden der übrigbleibenden doch immer noch unverändert bestehen.

Die von Lockyer vermutete Dissoziation der Elemente im elektrischen Funken ist also nach unserer Theorie zu beseitigen. Wie leicht zu ersehen, ist die Größe der Eigenperioden eine Frage der Differentialgleichungen des Systems, die Intensität der einzelnen Linien ist dagegen eine Frage der Integrationskonstanten.

Wir haben ja in der vorigen Vorlesung (§ 10) bewiesen, daß die Charakteristik eines Leitersystems in die Form

$$\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_a + \sum G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'} = 0$$

zu bringen ist. Tritt nun der α-te Leiter aus dem System heraus, so wird die Charakteristik zu

$$\mathfrak{M}_a \{\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_{a-1} \cdot \mathfrak{M}_{a+1} \dots \mathfrak{M}_a + \sum G_{\mu,\nu,\mu',\nu'} M_{\mu,\nu} M_{\mu',\nu'}\} = 0,$$

wo jetzt die μ, ν, μ', ν' die dem α-ten Leiter eigenen Werte nicht mehr erhalten dürfen.

Wegen der eingetretenen Dissoziation hat also im allgemeinen jede Spektrallinie eine Verschiebung erfahren.

Auf ähnliche Weise ist nach Fig. 5 die Dissoziation der Elemente (eigentlich des Kupferatoms) im elektrischen Bogen auszuschließen; und dasselbe gilt offenbar für Zontas Versuchsergebnisse (I. Vorl. § 6). Dagegen dürfen wir die Möglichkeit der Dissoziation in den Sonnenprotuberanzen, sowie in den neuen Sternen als äußerst wahrscheinlich betrachten. Denken wir uns das System der Fig. 52 (2) als ein Atom, und lassen es dissoziieren, so werden einige Linien im Spektrum nach dem violetten Ende, die übrigbleibenden aber nach dem roten Ende hin verschoben, was eben den beobachteten Tatsachen entspricht (I. Vorl. § 7).

Bleiben übrigens, unter bestimmten Umständen, gewisse Linien gleichzeitig aus, so ist es ganz natürlich, daran zu denken, daß sie von einem besonderen Bestandteile des Atoms ausgestrahlt werden, welcher, aus irgend einem Grund, unerregt geblieben.

Nach den Angaben von Lenard ist also das Natriumatom als von drei Leitern[1]) zusammengesetzt zu denken; und dasselbe gilt für das Kupferatom nach den Versuchen des Verfassers.

§ 7. Damit kommen wir zu einem schönen Resultate, in dem die Linienserien von Kayser und Runge (I. Vorl. § 3) einen physikalischen Sinn erhalten. Eine Serie ist nämlich nach unserer Theorie als die Strahlung eines (wahrscheinlich abgesonderten) Bestandteiles des Atomes zu betrachten.

Leider läßt sich nicht im allgemeinen angeben, wie ein komplizierter Leiter gebildet sein muß, damit er eben eine Linienserie aussende. Bei einzelnen einfachen Fällen ist aber das Problem ohne jede Schwierigkeit zu lösen.

Der Leiter, den wir in der elften Vorlesung (§ 4) betrachtet haben, genügt z. B. der Formel

$$\Lambda_n^{-1} = A - \frac{B}{n^2};$$

und auf ähnliche Weise genügt der Leiter mit vier Eigen-

[1]) Oder vielmehr von sechs. Man siehe weiter unten § 9.

perioden, der in der genannten Vorlesung (§ 6) berechnet wurde, der allgemeineren Bedingung

$$\Lambda_n^{-1} = A - \frac{B}{n^2} - \frac{C}{n^4}.$$

Um dies zu beweisen bedenke man, daß für den letzten Leiter die reziproken Wellenlängen den Zahlen

$$\sqrt{2 - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} = 0{,}62,$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} = 1{,}17,$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} = 1{,}62$$

und

$$\sqrt{2 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} = 1{,}90$$

proportional sind; setzt man daher

$$\begin{cases} 0{,}62 = A - \frac{B}{9} - \frac{C}{81}, \\ 1{,}17 = A - \frac{B}{16} - \frac{C}{256}, \\ 1{,}62 = A - \frac{B}{25} - \frac{C}{625}, \end{cases}$$

so werden die Koeffizienten A, B und C leicht zu berechnen sein, und man kann ebenfalls

$$\Lambda_6^{-1} = A - \frac{B}{36} - \frac{C}{1296}$$

erhalten, woraus

$$\Lambda_6^{-1} = 1{,}91$$

sich ergibt.

§ 8. Fassen wir also alles zusammen, was bis jetzt gefunden wurde, so dürfen wir behaupten, daß die materiellen Atome keineswegs durch einfache Leiter, sondern vielmehr durch zusammengesetzte Leitersysteme darzustellen sind. Dabei wird wahrscheinlich jede Linienserie von einem bestimmten (abgesonderten) Bestandteile ausgestrahlt.

§ 9. Die Entstehung von Doublet- und Tripletspektren ist nun aus unserer Theorie in ungezwungener Weise abzuleiten.

Die Rechnungen, welche in der dreizehnten Vorlesung (§§ 6, 7 und 9) ausgeführt wurden, darf man ja als die Beschreibungen von Atomen betrachten, die lauter Doublets und Triplets auszustrahlen vermögen.

Es ist hierbei ausdrücklich zu betonen, daß, wenn zwei Leiter, welche eine Linienserie aussenden, zu einem System zusammengestellt sind, sie alsdann eben zwei Serien emittieren werden.

Durch dimensionale Betrachtungen ist es aber leicht zu beweisen, daß die Funktionen

$$T_1(L + M, K + H),$$
$$T_1(L - M, K - H), \text{ usw.}$$

den Wurzeln

$$\sqrt{\frac{L + M}{K + H}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{L - M}{K - H}}$$

proportional sein müssen, woraus folgt, daß die Perioden der Linien, welche ein Doublet bilden, durch die Formeln

$$\begin{cases} T_\mu(L + M, K + H) = A \cdot T_\mu(L, K), \\ T_\mu(L - M, K - H) = B \cdot T_\mu(L, K) \end{cases}$$

zu berechnen sind.

Folglich:

$$T_\mu(L + M, K + H) - T_\mu(L - M, K - H) = (A - B) \cdot T_\mu(L, K);$$

es nimmt also die Periodendifferenz mit der Größe der ungestörten Periode fortwährend zu. In qualitativer Hinsicht stimmt dies mit den beobachteten Tatsachen überein.

Fig. 52 (4) liefert ein einfaches Beispiel für ein System, welches lauter Doublets ausstrahlt. Nach den Zahlenangaben des ersten Paragraphen dieser Vorlesung werden hier folgende Wellenlängen gefunden

(3)		88,8		153,8	
(4)	87,8	89,4	152,1	154,8

§ 10. Für chemisch verwandte Körper sind die Spektren, wie bekannt, in ähnlicher Weise gebaut. Wir wollen uns fragen, wie nach unserem Bilde die Ähnlichkeit zu verstehen ist, wie also die Struktur des Natrium- bzw. des Kaliumatoms abgeleitet werden kann, wenn man z. B. das Lithiumatom als bekannt voraussetzt.

Dazu betrachten wir ein Leitersystem, und setzen der Einfachheit halber voraus, daß die elektrostatischen Wirkungen sowie die Widerstände zu vernachlässigen sind.

Hiernach ist es leicht zu beweisen, daß, wenn die linearen Dimensionen eines Systems durch eine Zahl k multipliziert werden, alsdann die Längen der ausgestrahlten Wellen ebenfalls mit k multipliziert erscheinen.

In der Tat enthält die Determinante, welche die linke Seite der charakteristischen Gleichung bildet, Glieder von drei Formen, d. h.

$$D^2 L, \quad D^2 M \quad \text{und} \quad \frac{1}{C}.$$

Nehmen die linearen Dimensionen im Verhältnisse von 1 zu k zu, so werden offenbar die L, M und C mit k multipliziert. Die Determinantenglieder werden also zu

$$D^2 k L, \quad D^2 k M \quad \text{und} \quad \frac{1}{k C},$$

oder, was dasselbe bedeutet, zu

$$D^2 k^2 L, \quad D^2 k^2 M \quad \text{und} \quad \frac{1}{C}.$$

Ist nun D_n eine Wurzel der früheren Gleichung, so wird auch $\frac{D_n}{k}$ eine Wurzel der neuen Gleichung darstellen; die Wurzeln der Charakteristik sind aber den Eigenperioden des Systems umgekehrt proportional, diese letzteren nehmen also nach demselben Verhältnisse, nach welchem die D_n abnehmen, regelmäßig zu. Damit ist aber der angegebene Satz als bewiesen zu betrachten.

Bleiben nun die Drähte unverändert, und werden wie vorher die Dimensionen der Kapazitäten mit k multipliziert, so nehmen offenbar die Wellenlängen im Verhältnisse von 1 zu $\sqrt{k}$ zu.

Jetzt setzen wir weiter voraus, daß die Gewichte der Drähte gegen die Gewichte der Kapazitäten sehr klein sind.

Dann ist, bei der letzten Annahme, das Gewicht des ganzen Systems k^3-mal so groß wie vorher geworden. Nennt man also P und P' die Gewichte, Λ_n und Λ'_n die korrespondierenden Wellenlängen, d. h. die Wellenlängen, welche einer und derselben Wurzel der Charakteristik vor und nach der Deformation entsprechen, so hat man offensichtlich

$$\frac{P''}{P} = k^3,$$

$$\frac{\Lambda'_n}{\Lambda_n} = \sqrt{k}$$

zu setzen; und daher

$$\frac{\Lambda'_n}{\Lambda_n} = \sqrt[6]{\frac{P'}{P}}.$$

Der Einfachheit halber wollen wir von jetzt an den Inbegriff der Systeme, welche aus einem gegebenen Systeme in der Weise zu erhalten sind, daß die Drähte unverändert bleiben und die linearen Dimensionen der Kapazitäten mit irgendeiner Konstante multipliziert werden, eine Systemenschar nennen. Nach dem Gesagten dürfen wir also behaupten, daß in einer Systemenschar die korrespondierenden Wellenlängen in demselben Verhältnis wie die sechsten Wurzeln aus den Gewichten stehen.

Nun läßt eine einfache Betrachtung erkennen, daß die Atome, welche einer und derselben Familie im periodischen System angehören, als eine Systemenschar darzustellen sind.

Man braucht dazu nur die hier definierten korrespondierenden Linien als homologe Linien nach Kayser und Runge zu interpretieren, als Linien also, welche in entsprechenden Serien ähnlich gebauter Spektren, durch denselben Wert der Konstante n, nach der Formel

$$\Lambda_n^{-1} = A - \frac{B}{n^2} - \frac{C}{n^4}$$

zu berechnen sind.

Die Regelmäßigkeit, welche sich dadurch feststellen läßt, ist keine streng gültige, was übrigens leicht vorausgesehen werden konnte.

Denn die Formel

$$\frac{\Lambda'_n}{\Lambda_n} = \frac{A - \frac{B}{n^2} - \frac{C}{n^4}}{A - \frac{B'}{n^2} - \frac{C'}{n^4}}$$

zeigt, daß das Verhältnis Λ'_n/Λ_n keinen festen Wert hat; sondern einen Wert, welcher mit dem Parameter n sich ändern muß. In praktischen Fällen sind aber die Wertschwankungen von Λ'_n/Λ_n klein und regelmäßig, wie wir durch ein Beispiel gleich erkennen werden.

Wir ziehen in Betracht die ersten Nebenserien der Lithium- und Natriumspektren, für welche von Kayser und Runge folgende Werte der Konstanten angegeben wurden

	A	B	C
Li	28 587	109 625	1 847
Na	24 475	110 065	4 148

Hieraus lassen sich nun die Verhältnisse der homologen Wellenlängen berechnen, nämlich

n	3	4	5	6	7	∞
$\frac{(\Delta_n)_{Na}}{(\Delta_n)_{Li}}$	1,34	1,23	1,21	1,19	1,18	1,17

Es ist aber

$$(P)_{Li} = 7 \ ,$$

$$(P)_{Na} = 23 \, ,$$

also:

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_{Na}}{(P)_{Li}}} = 1{,}22 \, .$$

Für das erste Paar ($n = 3$) ist hier das Längenverhältnis ziemlich groß, aber vom zweiten Paare an nimmt es nur sehr langsam ab. Für $n = 4$ und $n = 5$ ist mit großer Annäherung

$$\frac{\Delta'_n}{\Delta_n} = \sqrt[6]{\frac{P'}{P}} \, ,$$

und den Mittelwert aus den Zahlen

1,34 1,23 1,21 1,19 1,18

berechnet man zu

1,23 .

Zu ganz ähnlichen Resultaten gelangen wir nun, indem wir das Lithiumspektrum mit den Spektren von Kalium, Rubidium und Cäsium vergleichen.

Für $n = 3$ ist das Längenverhältnis wieder groß; für $n = 4$ und $n = 5$ aber erhält man Werte, welche mit dem

Mittelwert aus den fünf ersten Wellenverhältnissen sowie mit $\sqrt[5]{P'/P}$ in ziemlich guter Übereinstimmung stehen. Wir führen die Werte der Verhältnisse an, die für das dritte Paar ($n = 5$) sich berechnen lassen

$$\frac{(A)_K}{(A)_{Li}} = 1{,}39\,, \qquad \frac{(A)_{Rb}}{(A)_{Li}} = 1{,}50\,, \qquad \frac{(A)_{Cs}}{(A)_{Li}} = 1{,}63\,,$$

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_K}{(P)_{Li}}} = 1{,}33\,, \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Rb}}{(P)_{Li}}} = 1{,}52\,, \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Cs}}{(P)_{Li}}} = 1{,}63\,.$$

Für andere Elementgruppen ist die Regelmäßigkeit noch strenger, indem das A'_n/A_n als eine fast konstante Größe sich zeigt. Darauf können wir aber leider nicht näher eingehen.

Fünfzehnte Vorlesung.

Schillerfarben und optische Resonanz.

§ 1—2. Selektive Reflektion eines Resonatorenschirmes. — § 3—5. Elektrische Schwingungen einer leitenden Kugel. — § 6. Zur Theorie der Scottischen Kontrollversuche.

§ 1. Die theoretische Berechnung der Versuche, welche in der dritten Vorlesung beschrieben wurden, bietet keine besondere Schwierigkeit.

Wir denken uns zwei durch die zx-Ebene getrennte Medien; das eine Medium, das auf der Seite der negativen y liegt, soll dabei durch das Kennzeichen 1, das andere aber durch das Kennzeichen 2 charakterisiert werden.

Medium 1 wollen wir uns als ein homogenes dielektrisches (etwa Luft) vorstellen, Medium 2 dagegen wird viele Leiter mit einem einzigen Freiheitsgrad enthalten, etwa nach Fig. 57. Wir denken uns die Leiter der z-Achse parallel gestellt, und betrachten, der Einfachheit halber, einen Strahl, der senkrecht zur Trennungsfläche einfällt und in der xy-Ebene polarisiert ist.

Den Bezeichnungen der zehnten Vorlesung entsprechend setzen wir

$$\begin{cases} Z_e = \mathfrak{A}_e e^{l_1 y - i n t}, \\ Z_r = \mathfrak{A}_r e^{-l_1 y - i n t}, \\ Z_d = \mathfrak{A}_d e^{l_2 y - i n t}, \end{cases}$$

wo mit den Kennzeichen e, r und d, der Reihe nach, der einfallende, der reflektierte und der durchgehende Strahl charakterisiert sind.

Nach den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

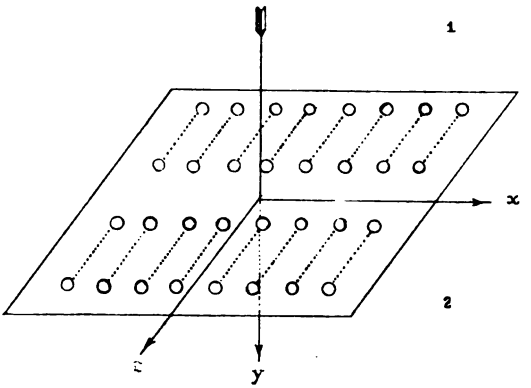


Fig. 57.

(VIII. Vorl. § 1, Gl. 1) haben wir dann die magnetischen Kräfte durch

$$\begin{cases} L_e = -\frac{l_1}{A\mu_1 n i}\mathfrak{A}_e e^{l_1 y - int}, \\ L_r = \frac{l_1}{A\mu_1 n i}\mathfrak{A}_r e^{-l_1 y - int}, \\ L_d = -\frac{l_2}{A\mu_2 n i}\mathfrak{A}_d e^{l_2 y - int} \end{cases}$$

darzustellen.

Die Kontinuität der Kräfte, die der Trennungsfläche parallel liegen, fordert nun, daß

$$\begin{cases} Z_e + Z_r = Z_d, \\ L_e + L_r = L_d \end{cases}$$

für $y = 0$ sein soll.

Wir bekommen daher

$$\mathfrak{A}_e + \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_d,$$

$$\frac{l_1}{\mu_1}(\mathfrak{A}_e - \mathfrak{A}_r) = \frac{l_2}{\mu_2}\mathfrak{A}_d,$$

also:

$$\mathfrak{A}_e + \mathfrak{A}_r = \frac{l_1\mu_2}{l_2\mu_1}(\mathfrak{A}_e - \mathfrak{A}_r),$$

d. h.

$$\mathfrak{A}_r = \frac{l_1 \mu_2 - l_2 \mu_1}{l_1 \mu_2 + l_2 \mu_1} \mathfrak{A}_e .$$

Nun ist aber (X. Vorl. § 3 und 5)

$$l_1 = \frac{i n}{c_1},$$

$$l_2 = -k_2 + \frac{i n}{c_2}$$

zu setzen, woraus

$$\mathfrak{A}_r = \frac{\frac{\mu_2}{c_1} - \frac{\mu_1}{c_2} - \frac{k_2 \mu_1}{n} i}{\frac{\mu_2}{c_1} + \frac{\mu_1}{c_2} + \frac{k_2 \mu_1}{n} i} \mathfrak{A}_e ,$$

oder noch, durch Einführung der Bedingungen

$$\mu_1 = \mu_2 = 1 ,$$

$$(*) \qquad \mathfrak{A}_r = \frac{\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} - \frac{k_2}{n} i}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{k_2}{n} i} \mathfrak{A}_e$$

folgt.

Ist $\mathfrak{A}_e$ eine reelle Größe, so wird also im allgemeinen $\mathfrak{A}_r$ imaginär. Die physikalische Bedeutung dieses Resultates ist aber leicht zu finden; schreibt man nämlich $\mathfrak{A}_r$ in der Form

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{B}_r e^{i n \delta},$$

so wird

$$Z_r = \mathfrak{A}_r e^{-l_1 y - i n t},$$

$$= \mathfrak{A}_r e^{-i n \left(\frac{y}{c_1} + t\right)},$$

$$= \mathfrak{B}_r e^{-i n \left(\frac{y}{c_1} + t - \delta\right)} .$$

Die Phase hat also durch die Reflexion eine Verschiebung erlitten.[1]) Nimmt man $\mathfrak{A}_e^2$ als Maß der einfallenden Energie, so dürfen wir offenbar

$$\mathfrak{B}_r^2 = \mathfrak{B}_r e^{i n \delta} . \mathfrak{B}_r e^{-i n \delta}$$

als Maß der reflektierten Energie betrachten.

---

[1]) Die eintretende Phasendifferenz erklärt nun die Bildung eines Knotens auf dem Schirme in der stehenden Welle bei senkrechter Inzidenz (II. Vorl. § 2, Fußnote).

Aus Gleichung (*) wird nun

$$\mathfrak{A}_r = \frac{1 - \frac{c_1}{c_2} - \frac{k_2 c_1}{n} i}{1 + \frac{c_1}{c_2} + \frac{k_2 c_1}{n} i} \mathfrak{A}_e ,$$

$$= \frac{1 - N - \frac{k}{A n} i}{1 + N + \frac{k}{A n} i} \mathfrak{A}_e ,$$

wo die Indizes, der Einfachheit halber weggelassen wurden und N und k die für das zweite Medium charakteristischen Größen sind.

Bezeichnet man aber durch I_e und I_r die einfallende bezw. die reflektierte Energie, so wird, nach einer vorausgeschickten Bemerkung

$$I_r = \frac{1 - N - \frac{k}{A n} i}{1 + N + \frac{k}{A n} i} \cdot \frac{1 - N + \frac{k}{A n} i}{1 + N - \frac{k}{A n} i} I_e ,$$

$$= \frac{(1 - N)^2 + \frac{k^2}{A^2 n^2}}{(1 + N)^2 + \frac{k^2}{A^2 n^2}} I_e ,$$

$$= I_e - \frac{4 N}{(1 + N)^2 + \frac{k^2}{A^2 n^2}} I_e .$$

Der Nenner im zweiten Glied auf der rechten Seite wird nur groß, wenn k groß ist; eine ausgesprochene Reflexion ist also nur für die Wellen zu erhalten, deren Periode mit der Periode der im zweiten Medium eingebetteten Leiter übereinstimmt.

Es besitzt hiernach das zweite Medium eine Oberflächenfarbe (Schillerfarbe), und wird in durchgehendem bezw. in reflektiertem Lichte komplementär gefärbt erscheinen.

§ 2. Liegt die einfallende elektrische Kraft der Längsrichtung der Resonatoren nicht mehr parallel, sondern schließen die zwei Richtungen den Winkel ω ein, so ist Gleichung (4) der zehnten Vorlesung (§ 4) durch

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{E \cos \omega}{2 - a n i - b n^2}$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

zu ersetzen; woraus wieder statt Gleichung (5) (X. Vorl. § 5)

$$\frac{2k}{cn} = A^2 E a n \cos\omega \frac{1}{(2 - b n^2)^2 + a^2 n^2}$$

sich ergibt.

Wird also die Resonatorenplatte in ihrer Ebene um 90° gedreht, so hat man $k = 0$ zu setzen, was die Entstehung der selektiven Reflexion (bezw. Absorption) aufschließt. Dies stimmt aber mit den Erfahrungsergebnissen vortrefflich überein (II. Vorl. § 2, Fußnote u. III. Vorl. § 5).

§ 3. Die Theorie, die wir bis jetzt entwickelt haben, ist von ganz allgemeiner Gültigkeit; strenger gesagt, es hängen selektive Absorption und Reflexion nur von den Eigenperioden, nicht aber von der Form des schwingenden Systems ab. Wollen wir also die Eigenschaften von einem Schirme bestimmen, welcher aus lauter kugelförmigen Körnern besteht, so wird es genügen die Frequenz zu berechnen, die eben einer leitenden Kugel zukommt.

An der Schreibart, welche in der achten Vorlesung benutzt wurde (§ 9 ff.), festhaltend, setze man dazu

$$(1) \qquad \Pi = \frac{e^{\lambda(mr - nt)} \cos(mr - nt)}{r},$$

und beachte, daß Π nur von r und t abhängen wird. Die Differentialgleichung (VIII. Vorl. § 9, Gl. a).

$$A^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \Delta \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$$

können wir daher vereinfachen.

Es wird, der Reihe nach

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \Pi}{\partial r} \frac{\varrho}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \frac{\varrho^2}{r^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial r} \frac{r - \varrho \frac{\varrho}{r}}{r^2},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial r} \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial r} \frac{r - x \frac{x}{r}}{r^2},$$

also:

$$\Delta \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r},$$

und

$$A^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

Wir setzen jetzt

$$\Pi = \frac{\Theta}{r},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Theta,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \Theta,$$

also:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2},$$

und

$$A^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2},$$

$$A^2 \frac{\partial^2 (r \Pi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2},$$

$$A^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2}. \tag{2}$$

Aus (1) wird nun

$$\Theta = e^{h(mr - \mathfrak{n}t)} \cos(mr - \mathfrak{n}t),$$

und wir haben zu versuchen, ob diese Funktion der Gleichung (2) genügt. Dabei erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} &= h^2 \mathfrak{n}^2 e^{h(mr - \mathfrak{n}t)} \cos(mr - \mathfrak{n}t) \\ &\quad - 2h\mathfrak{n}^2 e^{h(mr - \mathfrak{n}t)} \sin(mr - \mathfrak{n}t) \\ &\quad - \mathfrak{n}^2 e^{h(mr - \mathfrak{n}t)} \cos(mr - \mathfrak{n}t), \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= h^2 m^2 e^{h(mr - \mathfrak{n}t)} \cos(mr - \mathfrak{n}t) \\ &\quad - 2hm^2 e^{h(mr - \mathfrak{n}t)} \sin(mr - \mathfrak{n}t) \\ &\quad - m^2 e^{h(mr - \mathfrak{n}t)} \cos(mr - \mathfrak{n}t), \end{aligned}$$

welche Werte die zwei Bedingungsgleichungen liefern

$$A^2 \mathfrak{n}^2 = m^2,$$

$$A^2 \mathfrak{n}^2 (h^2 - 1) = m^2 (h^2 - 1).$$

Diesen Gleichungen genügt man aber offenbar, indem man

$$m = A\mathfrak{n}$$

setzt. Damit erhält Θ die neue Form

$$\Theta = e^{h\,n\,(A\,r\,-\,t)} \cos n\,(A\,r - t);$$

woraus

$$(1') \qquad \Pi = \frac{e^{h\,n\,(A\,r\,-\,t)} \cos n\,(A\,r - t)}{r}$$

sich ergibt.

§ 4. Wie aus (1') folgt, stellt unsere Lösung wieder eine Schar von Kugelwellen dar, welche durch das Medium mit der üblichen Geschwindigkeit $1/A$ sich fortpflanzen.

Für die Umgegend des Punktes $r = 0$ wird nun

$$\Pi = \frac{e^{-h\,n\,t} \cos n\,t}{r},$$

hier sind also die elektrischen Kräfte von einem Potential

$$\varphi = \frac{\partial\,\Pi}{\partial\,x} = e^{-h\,n\,t} \cos n\,t \,.\, \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\,x}$$

abzuleiten, was wieder einer elektrischen Doppelladung entspricht (VIII. Vorl. § 6).

Nun wollen wir die elektrischen Komponenten x, y, z berechnen, wozu man (VIII. Vorl. § 10)

$$X = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,x\,\partial\,x}, \qquad Y = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,y\,\partial\,x},$$

$$Z = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,x\,\partial\,x} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,y^2}$$

zu schreiben hat.

Jetzt wird aber

$$\frac{\partial\,\Pi}{\partial\,x} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} - \frac{1}{r^2}\,\Theta\right)\frac{x}{r} = \left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} - \frac{1}{r^3}\,\Theta\right)x,$$

und hiernach

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,x\,\partial\,x} = \left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,r^2} - \frac{3}{r^3}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} + \frac{3}{r^4}\,\Theta\right)\frac{x\,x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,x^2} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} - \frac{1}{r^3}\,\Theta + \left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,r^2} - \frac{3}{r^3}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} + \frac{3}{r^4}\,\Theta\right)\frac{x^2}{r}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,y\,\partial\,x} = \left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,r^2} - \frac{3}{r^3}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} + \frac{3}{r^4}\,\Theta\right)\frac{y\,x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial\,y^2} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} - \frac{1}{r^3}\,\Theta + \left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\,\Theta}{\partial\,r^2} - \frac{3}{r^3}\,\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} + \frac{3}{r^4}\,\Theta\right)\frac{y^2}{r},$$

also:

$$\begin{cases} X = -\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{3}{r^4}\Theta\right)\frac{xz}{r}, \\ Y = -\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{3}{r^4}\Theta\right)\frac{yz}{r}, \\ Z = 2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} - \frac{1}{r^3}\Theta\right) + \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{3}{r^4}\Theta\right)\frac{x^2+y^2}{r}. \end{cases}$$

§ 5. Diese Ausdrücke gestatten nun die Frage zu entscheiden, ob und wann die angenommene Lösung (1') die Strahlung einer schwingenden Kugel wirklich darstellen wird. Dazu merke man, daß auf der Kugel die elektrische Kraft zur leitenden Fläche normal sein muß; wir haben also folgenden Bedingungsgleichungen zu genügen

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y},$$

$$\frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

und

$$\frac{Z}{z} = \frac{X}{x}.$$

Die erste Gleichung ist nun identisch erfüllt, und die übrigbleibenden liefern eine einzige Bedingung, d. h.

$$-\frac{z}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{3}{r^4}\Theta\right)$$
$$= \frac{2}{z}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} - \frac{1}{r^3}\Theta\right) + \frac{x^2+y^2}{rz}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{3}{r^4}\Theta\right),$$

oder noch, durch leichte Umformungen

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Theta = 0.$$

Beim Einsetzen des Wertes von Θ wird aber

$$A^2h^2\mathfrak{n}^2\cos\mathfrak{n}(Ar-t) - 2A^2h\mathfrak{n}^2\sin\mathfrak{n}(Ar-t)$$
$$-A^2\mathfrak{n}^2\cos\mathfrak{n}(Ar-t) - \frac{Ah\mathfrak{n}}{r}\cos\mathfrak{n}(Ar-t)$$
$$+\frac{A\mathfrak{n}}{r}\sin\mathfrak{n}(Ar-t) + \frac{1}{r^2}\cos\mathfrak{n}(Ar-t) = 0,$$

und daher

$$\begin{cases} -2A^2h\mathfrak{n}^2 + \frac{A\mathfrak{n}}{r} = 0, \\ A^2h^2\mathfrak{n}^2 - A^2\mathfrak{n}^2 - \frac{Ah\mathfrak{n}}{r} + \frac{1}{r^2} = 0. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir

$$r = \frac{1}{2 A h \mathfrak{n}}, \qquad h = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

also:

$$r = a = \frac{\sqrt{3}}{2 A \mathfrak{n}}, \qquad \mathfrak{n} = \frac{\sqrt{3}}{2 A a}.$$

Man kann also schließen, daß die Lösung

$$\Pi = \frac{e^{\frac{1}{2Aa}(Ar-t)} \cos \frac{\sqrt{3}}{2Aa}(Ar-t)}{r},$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2Aa}(Ar-t)} \cos 2\pi \left[\frac{r}{\left(\frac{4\pi a}{\sqrt{3}}\right)} - \frac{t}{\left(\frac{4\pi A a}{\sqrt{3}}\right)}\right]}{r}$$

die Strahlung richtig darstellt, welche von einer schwingenden Kugel mit dem Halbdurchmesser a emittiert wird. Dabei ist die entsprechende Wellenlänge durch

$$(3) \qquad A = \frac{4\pi a}{\sqrt{3}}$$

ausgedrückt.

§ 6. Wird mit d der Durchmesser der Kugel bezeichnet so hat man

$$(3') \qquad A = \frac{2\pi d}{\sqrt{3}} = 3{,}6\, d$$

zu setzen.

Vergleichen wir nun dieses Resultat mit den experimentellen Ergebnissen von Scotti (III. Vorl. § 8), so dürfen wir ganz entschieden die Resonanzwirkungen bei den Anilinpräparaten, ebenso wie bei den Schuppen der Schmetterlinge ausschließen. Denn die Durchmesser der gemessenen Körner sind viel größer als es die Theorie verlangen würde.

Ob bei den Versuchen von Wood die Resonanz wirklich eine Rolle spielt, möge dagegen für jetzt dahingestellt bleiben; die Anwesenheit eines recht bedeutenden Dekrements für die Amplitude der Schwingung macht aber die Sache durchaus unwahrscheinlich.

Vierter Abschnitt.

Elektrostatische Theorie.

Sechzehnte Vorlesung.

Gleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper; Möglichkeit einer elektrostatischen Theorie der Spektralanalyse.

§ 1. Gleichungen für bewegte Körper. — § 2. Konvektionsstrom. — § 3. Beharrlichkeit der elektrischen Ladungen. — § 4—5. Pendelbewegung eines elektrisierten Teilchens. — § 6. Zeemansches Phänomen. — § 7. Vergleich der elektrodynamischen und elektrostatischen Wirkungen bei bewegten Teilchenpaaren.

§ 1. Es wurde in der achten Vorlesung bewiesen, daß für unbewegte Körpersysteme

$$1) \quad \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = A \frac{d}{dt} \int [\mu L \cos(n,x) + \mu M \cos(n,y) + \mu N \cos(n,z)]\, d\sigma,$$

und

$$(2) \quad \int (L\,dx + M\,dy + N\,dz) = -A \frac{d}{dt} \int [\varepsilon X \cos(n,x) + \varepsilon Y \cos(n,y) + \varepsilon Z \cos(n,z)]\, d\sigma - 4\pi A \int [f \cos(n,x) + g \cos(n,y) + h \cos(n,z)]\, d\sigma$$

ist (VIII. Vorl. § 8).[1])

Als Fundamentalhypothese nehmen wir jetzt an, daß diese Gleichungen für bewegte Körper ihre Gültigkeit noch immer behalten; es wird sich zeigen, daß aus diesen Festsetzungen zwei Sätze von Gleichungen sich ableiten lassen, welche zur

[1]) Eigentlich steht dort $\partial/\partial t$ statt d/dt geschrieben; es wurde aber seinerzeit bemerkt (VIII. Vorl. § 5), daß für ruhende Systeme $\partial/\partial t$ genau dasselbe wie d/dt bedeutet.

Beschreibung der elektrodynamischen Erscheinungen in bewegten Systemen genügen.

Aus Gleichung (1), durch Austührung der angedeuteten Differentiation leitet man

$$\begin{aligned}\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = A\int\Big[&\mu\frac{dL}{dt}\cos(n,x)\\ &+ \mu\frac{dM}{dt}\cos(n,y) + \mu\frac{dN}{dt}\cos(n,z)\Big]\,d\sigma\\ + A\int\Big\{&\mu L\frac{d}{dt}[\cos(n,x)\,d\sigma] + \mu M\frac{d}{dt}[\cos(n,y)d\sigma]\\ &+ \mu N\frac{d}{dt}[\cos(n,z)\,d\sigma]\Big\}\end{aligned} \tag{1'}$$

ab. Was nun die Ableitungen wie dL/dt usw. betrifft, so ist ganz einfach

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial L}{\partial z}\frac{dz}{dt},\\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \alpha\frac{\partial L}{\partial x} + \beta\frac{\partial L}{\partial y} + \gamma\frac{\partial L}{\partial z}\end{aligned} \tag{a}$$

usw. zu setzen, wo mit α, β und γ die Geschwindigkeitskomponenten für den Punkt $(x\cdot y\cdot z)$ bezeichnet worden sind; und es bleibt nur übrig die Glieder mit Ableitungen wie $(d/dt)[\cos(n,x)\,d\sigma]$ zu berechnen.

Damit werden wir am besten fertig, indem wir ein System von krummlinigen, auf der Fläche σ festliegenden Koordinaten u und v einführen.

Dann ist

$$\cos(n,x)\,d\sigma = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv,$$

also:

$$\frac{d}{dt}[\cos(n,x)\,d\sigma] = \left[\frac{\partial(\beta,z)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial(y,\gamma)}{\partial(u,v)}\right]du\,dv.$$

Die rechte Seite wollen wir jetzt umformen, und schreiben dazu

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\beta,z)}{\partial(u,v)} &= \frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},\\ &= \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial v}\\ &\qquad - \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\gamma,\gamma)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \gamma}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \gamma}{\partial u},$$

$$= \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$- \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v};$$

beim Addieren dieser Gleichungen werden nun die Glieder

$$\frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

zu Null, und die übrigbleibenden Glieder lassen sich in die einfache Form

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

bringen.

Man bekommt daher

$$\frac{d}{dt}[\cos(n,x)\,d\sigma] = \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\,dv,$$

(b)
$$= \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)\cos(n,x) - \frac{\partial \beta}{\partial x}\cos(n,y) - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\cos(n,z)\right] d\sigma,$$

und bei Einführung der Werte (a) und (b) in Gleichung (1')

$$\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

$$= A\int\mu\left(\frac{\partial L}{\partial t} + \alpha\frac{\partial L}{\partial x} + \beta\frac{\partial L}{\partial y} + \gamma\frac{\partial L}{\partial z}\right)\cos(n,x)\,d\sigma$$

$$+ A\int\mu L\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)\cos(n,x)\,d\sigma$$

$$+ A\int\mu M\left(-\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\cos(n,x)\,d\sigma$$

$$+ A\int\mu N\left(-\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\cos(n,x)\,d\sigma + \ldots;$$

es ist aber, nach dem Stokesschen Lehrsatz (IV. Vorl. § 8)

$$\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(n,x)\,d\sigma + \ldots.$$

Die rechten Seiten dieser und der vorletzten Gleichung können wir also gleich setzen.

Bei der Willkürlichkeit der Fläche σ darf man übrigens das Integralzeichen vernachlässigen, was zur Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = A\mu\left[\frac{\partial L}{\partial t} + \alpha\frac{\partial L}{\partial x} + \beta\frac{\partial L}{\partial y} + \gamma\frac{\partial L}{\partial z} + L\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - M\frac{\partial \alpha}{\partial y} - N\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right]$$

führt.

Die rechte Seite formen wir wieder um durch Addieren und Abziehen der Glieder $A\mu\alpha\,\partial M/\partial y$ und $A\mu\alpha\,\partial N/\partial z$, wodurch

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = A\mu\left[\frac{\partial L}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(L\beta - M\alpha) - \frac{\partial}{\partial z}(N\alpha - L\gamma)\right],$$

d. h.

$$A\mu\left[\frac{\partial L}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}[Z + A\mu(M\alpha - L\beta)] - \frac{\partial}{\partial z}[Y + A\mu(L\gamma - N\alpha)] \tag{3}$$

erhalten wird.

Durch eine der vorhergehenden ganz ähnliche Rechnung leitet man nunmehr aus (2) die weitere Gleichung

$$A\varepsilon\left[\frac{\partial X}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right] + 4\pi A f = \frac{\partial}{\partial z}[M + A\varepsilon(Z\alpha - X\gamma)] - \frac{\partial}{\partial y}[N + A\varepsilon(X\beta - Y\alpha)] \tag{4}$$

ab. Es ist wohl kaum nötig zu bemerken, daß aus (3) ebensogut wie aus (4) je zwei andere Gleichungen durch zyklische Vertauschung zu erhalten sind.

§ 2. Gleichung (3) werden wir später, in dieser Vorlesung, zur Berechnung der elektrischen Kräfte (§ 6) benutzen; jetzt wenden wir uns zur näheren Betrachtung von Gleichung (4).

Die linke Seite darf man in die Form

$$4\pi A\left[f + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\alpha\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]$$

setzen, die als sehr lehrreich sich zeigen wird. Denn bedenken wir, daß nach der Poissonschen Gleichung die Raumdichtigkeit der Elektrizität (ϱ) durch

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

gegeben ist, so werden wir gleich schließen können, daß die Größe $\alpha\varrho$ die Bedeutung einer Stromdichtigkeit hat. Strenger gesagt: es übt eine von einem ponderablen Körper mitgeführte elektrische Ladung magnetische Wirkungen aus, welche mit den Wirkungen sich decken, die von einem Leitungsstrom, mit den Dichtigkeitskomponenten

$$f = \varrho\alpha, \qquad g = \varrho\beta, \qquad h = \varrho\gamma$$

zu erhalten sind.

Lassen wir der Einfachheit halber die Bewegung nach der Richtung der z-Achse vor sich gehen; dann wird $\alpha = \beta = 0$, und natürlich auch $f = g = 0$, und es bleibt $h = \varrho\gamma$ übrig. Es ist aber $\varrho = dq/d\tau$, und folglich $h = \gamma\, dq/d\tau$; d. h. $(h\,dx\,dy)\,dz = \gamma\, dq$, also $i\,dz = \gamma\, dq$.

Ist daher, um den für die Optik interessantesten Fall gleich zu betrachten, ein von oszillierenden Strömen durchflossenes Leiterelement gegeben, so kann man dieselben magnetischen Wirkungen in die Ferne immer dadurch ausüben, daß man ein elektrisches Teilchen dq, mit einer durch $i\,dz = \gamma\, dq$ definierten Geschwindigkeit γ an derselben Stelle, dem Leiter entlang, schwingen läßt.

Hieraus entspringt also die Möglichkeit, die ganze elektrische Theorie der Spektralanalyse, wie sie in den letzten Vorlesungen dargestellt worden ist (VIII. bis XV. Vorl.), von einem neuen Standpunkte aus gründlich und vollständig aufzubauen. Dabei wird natürlich die vorige Untersuchung nicht sinnlos und entbehrlich, behält vielmehr ihre volle Bedeutung bei.

Wir wollen also von jetzt an die Moleküle und ponderablen Atome als Systeme elektrischer Teilchen betrachten; und es wird sich zeigen, daß dem neuen Bilde sogar eine größere Wahrscheinlichkeit als dem vorigen zukommt. Die mathematischen Schwierigkeiten nehmen aber in bedenklicher Weise zu, und dies ist auch leicht zu verstehen: bei den früheren Ausführungen war gewissermaßen die Schwingungsbahn der Elektrizität eine gegebene und es konnte kein Zweifel über die Möglichkeit und die Stabilität des betrachteten Systems entstehen. Dies ist jetzt nicht mehr der Fall und die Stabilitätsfrage tritt in den Vordergrund sobald man von rein kinematischen Betrachtungen absieht.

Gerade deswegen besitzt die neuere Form der elektrischen Theorie ihren eigenartigen Reiz, da sie ein unerwartetes Licht auf ein Urproblem der Chemie wirft. Der Grund, weshalb die Zahl der chemischen Atome eine beschränkte ist, scheint hiernach als ein Stabilitätskriterium aufzufassen zu sein.

§ 3. Bevor wir aber zur Betrachtung dieser Fragen übergehen, haben wir ein anderes Problem zu lösen.

Obwohl es bewiesen ist, daß eine in Bewegung begriffene elektrische Ladung in jedem Augenblick ein Stromelement darstellt, darf man ja immer noch zweifeln, ob die Größe dieser Ladung bei dem ganzen Prozesse unverändert bleiben wird.

Es läßt sich aber zeigen, daß in der Tat ein elektrisches Quantum durch die Bewegung seines Trägers in keiner Weise beeinflußt wird; dabei ist die Anwesenheit von Leitern bezw. von Leitungsströmen selbstverständlich auszuschließen.

Wir übernehmen also die drei Gleichungen (4), bilden der Reihe nach die Ableitungen nach den Koordinaten x, y und z, und summieren.

Die rechten Seiten heben sich miteinander auf, und es bleibt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon\alpha\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon\beta(\ldots)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t}+\varepsilon\gamma(\ldots)\right]=0$$

übrig; d. h. bei passender Umformung und Benutzung der Poissonschen Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\varepsilon+\varepsilon\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$
$$+\varepsilon\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots\right)+\varepsilon\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots\right)$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots\right)=0,$$

also:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varrho}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varrho}{\partial z}+\varrho\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)=0,$$

und endlich

$$\frac{d\varrho}{dt}+\varrho\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)=0.$$

Wir multiplizieren die beiden Seiten mit $d\tau$ und merken daß

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) d\tau = \frac{d}{dt}(d\tau)$$

ist. Man erhält daher

$$\frac{d\varrho}{dt} d\tau + \varrho \frac{d}{dt}(d\tau) = 0,$$

und folglich

$$\frac{d}{dt}(\varrho\, d\tau) = \frac{d}{dt}(dq) = 0;$$

jedes Raumelement im bewegten Körper wird also die ihm zuerteilte Ladung unverändert bewahren. Was eben zu beweisen war.

§ 4. Es fragt sich jetzt, wie ein schwingendes Teilchen sich bewegen muß, wenn es ein gewisses Energiequantum auszusenden hat.

Dazu setzen wir, wie vorher [VIII. Vorl. § 2, Gleichung (*)]

$$\begin{cases} L = A\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right), \\ M = A\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right), \\ N = A\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) \end{cases}$$

mit

$$F = \int \frac{f}{r} d\tau = \int \frac{\alpha}{r} dq,$$
$$G = \int \frac{g}{r} d\tau = \int \frac{\beta}{r} dq,$$
$$H = \int \frac{h}{r} d\tau = \int \frac{\gamma}{r} dq.$$

Gibt es nun ein einziges elektrisches Teilchen q, das nach der z-Achse fortschreitet, so wird gleich

$$F = G = 0, \qquad H = \frac{\gamma q}{r}$$

und damit

$$L = -A\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad M = A\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad N = 0.$$

Die elektrischen Kräfte sind dabei nach den Gleichungen [VIII. Vorl. § 1, Gleichung (1)]

$$\begin{cases} A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{cases}$$

zu berechnen. Man erhält für den jetzigen Fall

$$-A^2\mu\frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$A^2\mu\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$0=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y};$$

diesen Gleichungen wird aber genügt, indem man

$$X=Y=0, \qquad Z=-A^2\mu\frac{\partial H}{\partial t},$$

$$=-A^2\mu\frac{q}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial t}$$

setzt. Ist also γ eine konstante Größe, so hat man

$$Z=0$$

zu setzen, und damit wird auch (nach dem Pointingschen Lehrsatz) die ausgestrahlte Energie zu Null. Eine Strahlung kommt daher zum Vorschein in dem einzigen Fall, in welchem das elektrische Teilchen eine Beschleunigung hat.

§ 5. Die harmonische Bewegung oder Pendelschwingung ist nun eine solche, die eine Beschleunigung besitzt; und es ist auch leicht ein System elektrisierter Teilchen zu bilden, in welchem Pendelschwingungen auftreten müssen.

Dazu denken wir uns ein Quantum Q (etwa von positiver Elektrizität) regelmäßig in einer Kugel vom Radius b verteilt, und ein (bewegliches) Teilchen q von negativer Elektrizität im Abstand r vom Mittelpunkt der genannten Kugel.

Dann ist die Kraft, die q nach dem Mittelpunkte treibt, durch die Formel

$$\frac{q}{r^2}\frac{4\pi r^3 Q}{4\pi b^3}=\frac{qQ}{b^3}r,$$

$$=k^2 r$$

zu berechnen.

Die äußeren Kräfte werden also zu

$$-k^2 r\frac{x}{r}=-k^2 x, \qquad -k^2 r\frac{y}{r}=-k^2 y,$$

$$-k^2 r\frac{z}{r}=-k^2 z,$$

und dabei ist wie immer die kinetische Energie

$$T=\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

Die Lagrangeschen Gleichungen nehmen daher die Form an

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k^2 x = 0, \\ m\ddot{y} + k^2 y = 0, \\ m\ddot{z} + k^2 z = 0 \end{cases}$$

d. h.

$$\begin{cases} (m D^2 + k^2) x = 0, \\ (m D^2 + k^2) y = 0, \\ (m D^2 + k^2) z = 0. \end{cases}$$

Man muß hiernach

$$(*) \qquad \begin{cases} x = A_1 \cos \mathfrak{n} t + A_1' \sin \mathfrak{n} t = a_1 \sin (\mathfrak{n} t + \vartheta_1), \\ y = A_2 \cos \mathfrak{n} t + A_2' \sin \mathfrak{n} t = a_2 \sin (\mathfrak{n} t + \vartheta_2), \\ z = A_3 \cos \mathfrak{n} t + A_3' \sin \mathfrak{n} t = a_3 \sin (\mathfrak{n} t + \vartheta_3) \end{cases}$$

mit

$$\mathfrak{n} = \frac{k}{\sqrt{m}}$$

schreiben.

Wir setzen jetzt

$$(**) \qquad \begin{cases} x_1 = a_2 a_3 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_3), \\ y_1 = a_3 a_1 \sin (\vartheta_3 - \vartheta_1), \\ z_1 = a_1 a_2 \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2), \end{cases}$$

multiplizieren die Gleichungen (*) und (**) der Reihe nach miteinander, und erhalten

$$\begin{aligned} x x_1 &= a_1 a_2 a_3 \sin (\mathfrak{n} t + \vartheta_1) \sin (\vartheta_2 - \vartheta_3), \\ y y_1 &= a_1 a_2 a_3 \sin (\mathfrak{n} t + \vartheta_2) \sin (\vartheta_3 - \vartheta_1), \\ z z_1 &= a_1 a_2 a_3 \sin (\mathfrak{n} t + \vartheta_3) \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2), \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} x x_1 + y y_1 + z z_1 &= a_1 a_2 a_3 \sin \mathfrak{n} t \begin{vmatrix} \cos \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_1 & \sin \vartheta_2 & \sin \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_3 \end{vmatrix} \\ &\quad + a_1 a_2 a_3 \cos \mathfrak{n} t \begin{vmatrix} \sin \vartheta_1 & \sin \vartheta_2 & \sin \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_1 & \sin \vartheta_2 & \sin \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_1 & \cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_3 \end{vmatrix}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das elektrisierte Teilchen, mit der Masse m und der Ladung q, bewegt sich in einer Ebene, die auf dem Vektor $(x_1 \cdot y_1 \cdot z_1)$ senkrecht steht.

Der Kürze halber wollen wir nun die xy-Ebene mit der Bewegungsebene zusammenfallen lassen; woraus

$$x = a_1 \sin(\mathfrak{n}\, t + \vartheta_1) = a_1 \cos \mathfrak{n}\, t \sin \vartheta_1 + a_1 \sin \mathfrak{n}\, t \cos \vartheta_1,$$

$$y = a_2 \sin(\mathfrak{n}\, t + \vartheta_2) = a_2 \cos \mathfrak{n}\, t \sin \vartheta_2 + a_2 \sin \mathfrak{n}\, t \cos \vartheta_2,$$

$$z = 0$$

folgt.

Hieraus wird aber

$$\cos \mathfrak{n}\, t = \frac{\begin{vmatrix} x & a_1 \cos \vartheta_1 \\ y & a_2 \cos \vartheta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 \sin \vartheta_1 & a_1 \cos \vartheta_1 \\ a_2 \sin \vartheta_2 & a_2 \cos \vartheta_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_2 \cos \vartheta_2\, x - a_1 \cos \vartheta_1\, y}{a_1 a_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)},$$

$$\sin \mathfrak{n}\, t = \frac{\begin{vmatrix} a_1 \sin \vartheta_1 & x \\ a_2 \sin \vartheta_2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 \sin \vartheta_1 & a_1 \cos \vartheta_1 \\ a_2 \sin \vartheta_2 & a_2 \cos \vartheta_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 \sin \vartheta_1\, y - a_2 \sin \vartheta_2\, x}{a_1 a_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)},$$

also:

$$1 = \cos^2 \mathfrak{n}\, t + \sin^2 \mathfrak{n}\, t,$$

$$= \frac{(a_2 \cos \vartheta_2\, x - a_1 \cos \vartheta_1\, y)^2 + (a_1 \sin \vartheta_1\, y - a_2 \sin \vartheta_2\, x)^2}{a_1^2 a_2^2 \sin^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)},$$

d. h.

$$a_1^2 a_2^2 \sin^2(\vartheta_1 - \vartheta_2) = a_2^2 x^2 - 2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) x y + a_1^2 y^2;$$

die Bahn stellt sich hiernach im allgemeinen als eine Ellipse dar. Sie kann aber, in bestimmten Fällen, einfachere Formen annehmen; so wird sie zu einem Kreis bzw. zu einer geraden Linie, je nachdem

$$\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0, \qquad a_1 = a_2,$$

bzw.

$$\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0$$

ist.

§ 6. Daß das betrachtete System wirklich für die materiellen Atome ein zweckmäßiges Bild liefern kann, läßt sich nun aus der Berechnung des Zeemanschen Phänomens folgern.

Dazu nehmen wir an, daß der Prozeß, welcher im vorigen

Paragraphen erläutert wurde, in einem magnetischen Felde $\mathfrak{M}$ mit den (konstanten) Kräftekomponenten L, M, N vor sich geht.[1])

Nach den Gleichungen (3) (diese Vorl. § 1) wirkt dann auf das elektrisierte Teilchen eine Kraft mit den Komponenten

$$\begin{aligned} Xq &= A\mu q(M\gamma - N\beta), \\ Yq &= A\mu q(N\alpha - L\gamma), \\ Zq &= A\mu q(L\beta - M\alpha); \end{aligned}$$

die Gleichungen der Bewegung werden daher zu

$$\left\{\begin{aligned} m\ddot{x} + k^2 x - A\mu q(M\dot{z} - N\dot{y}) &= 0, \\ m\ddot{y} + k^2 y - A\mu q(N\dot{x} - L\dot{z}) &= 0, \\ m\ddot{z} + k^2 z - A\mu q(L\dot{y} - M\dot{x}) &= 0, \end{aligned}\right.$$

also:

$$\left\{\begin{aligned} (mD^2 + k^2)x + AND\mu q y - AMD\mu q z &= 0, \\ -AND\mu q x + (mD^2 + k^2)y + ALD\mu q z &= 0, \\ AMD\mu q x - ALD\mu q y + (mD^2 + k^2)z &= 0. \end{aligned}\right.$$

Nach dem üblichen Verfahren leiten wir hieraus die Charakteristik

$$\begin{vmatrix} mD^2 + k^2 & AND\mu q & -AMD\mu q \\ -AND\mu q & mD^2 + k^2 & ALD\mu q \\ AMD\mu q & -ALD\mu q & mD^2 + k^2 \end{vmatrix} = 0$$

ab, welche beim Entwickeln zu

$$(mD^2 + k^2)[m^2 D^4 + (2mk^2 + A^2\mathfrak{M}^2\mu^2 q^2)D^2 + k^4] = 0$$

wird. Die Eigenperioden sind also nach den Formeln

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^2}},$$

und

$$T^*, T^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{2m^2}{2mk^2 + A^2\mathfrak{M}^2\mu^2 q^2 \mp \sqrt{(2mk^2 + A^2\mathfrak{M}^2\mu^2 q^2)^2 - 4m^2k^4}}},$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2m^2}{2mk^2 + A^2\mathfrak{M}^2\mu^2 q^2 \mp \sqrt{4mk^2 A^2\mathfrak{M}^2\mu^2 q^2 + A^4\mathfrak{M}^4\mu^4 q^4}}}$$

[1]) Es bleibt für den Augenblick das Zeichen der beweglichen Ladung unbestimmt.

zu berechnen. Behält man nur die Glieder, welche nach $A\mathfrak{M}\mu q$ erster Ordnung sind, so wird endlich

$$T^*, T^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{2m^2}{2mk^2 \mp A\mathfrak{M}\mu q\sqrt{4mk^2}}},$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m^2}{mk^2 \mp A\mathfrak{M}\mu q\sqrt{mk^2}}},$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m^2}{mk^2\left(1 \mp \frac{A\mathfrak{M}\mu q}{\sqrt{mk^2}}\right)}},$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k^2}}\left(1 \pm \frac{A\mathfrak{M}\mu q}{2\sqrt{mk^2}}\right),$$

$$= T\left(1 \pm \frac{A\mathfrak{M}\mu q}{2\sqrt{mk^2}}\right);$$

die einzige Linie wird also durch das magnetische Feld zu einem Triplet aufgelöst. Daß dabei die Polarisationsverhältnisse, die die Erfahrung festgestellt hat, vorauszusehen sind, ist leicht zu zeigen.

Dazu betrachten wir rein geradlinige Schwingungen, und stellen die z-Achse den Kraftlinien parallel.

Dann dürfen wir

$$x = a\sin\mathfrak{n}t,$$
$$y = 0,$$
$$z = b\sin\mathfrak{n}t$$

setzen, oder, was dasselbe sagt

$$x = \frac{a}{2}\sin\mathfrak{n}t + \frac{a}{2}\sin\mathfrak{n}t,$$
$$y = \frac{a}{2}\cos\mathfrak{n}t - \frac{a}{2}\cos\mathfrak{n}t,$$
$$z = b\sin\mathfrak{n}t.$$

Die betrachtete Bewegung ist also durch die Zusammensetzung von drei Schwingungen, nämlich

$$(*)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}\sin\mathfrak{n}t, \\ y_1 = \frac{a}{2}\cos\mathfrak{n}t, \end{cases} \qquad (**)\quad \begin{cases} x_2 = \frac{a}{2}\sin\mathfrak{n}t, \\ y_2 = -\frac{a}{2}\cos\mathfrak{n}t, \end{cases}$$

$$(***)\quad z = b\sin\mathfrak{n}t$$

zu erhalten.

Es stellen (*) und (**) kreisförmige Bewegungen mit einander entgegengesetztem Sinn dar, während Gleichung (***) eine geradlinige Schwingung angibt.

Aus (*) leiten wir nun

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 = \frac{a}{2}\mathfrak{n}\cos\mathfrak{n}t, \qquad \ddot{x}_1 = -\frac{a}{2}\mathfrak{n}^2\sin\mathfrak{n}t,$$

$$\dot{y}_1 = \beta_1 = -\frac{a}{2}\mathfrak{n}\sin\mathfrak{n}t, \qquad \ddot{y}_1 = -\frac{a}{2}\mathfrak{n}^2\cos\mathfrak{n}t$$

ab, und auf ähnliche Weise aus (**)

$$\dot{x}_2 = \alpha_2 = \frac{a}{2}\mathfrak{n}\cos\mathfrak{n}t, \qquad \ddot{x}_2 = -\frac{a}{2}\mathfrak{n}^2\sin\mathfrak{n}t,$$

$$\dot{y}_2 = \beta_2 = \frac{a}{2}\mathfrak{n}\sin\mathfrak{n}t, \qquad \ddot{y}_2 = \frac{a}{2}\mathfrak{n}^2\cos\mathfrak{n}t,$$

und aus (***) endlich

$$\dot{z} = \gamma = b\,\mathfrak{n}\cos\mathfrak{n}t.$$

Nach den Festsetzungen ist übrigens

$$\mathfrak{M} = N$$

zu setzen.

Die Bewegungen (*) bzw. (**) werden also durch die Kräfte

$$X_1 q = A N \mu q \frac{a\mathfrak{n}}{2}\sin\mathfrak{n}t, \qquad X_2 q = -A N \mu q \frac{a\mathfrak{n}}{2}\sin\mathfrak{n}t,$$

bzw.

$$Y_1 q = A N \mu q \frac{a\mathfrak{n}}{2}\cos\mathfrak{n}t, \qquad Y_2 q = A N \mu q \frac{a\mathfrak{n}}{2}\cos\mathfrak{n}t$$

beeinflußt; nur Bewegung (***) bleibt ungestört.

Anders gesagt, es erhält die erste Kreisbewegung eine Beschleunigung, welche, der Größe nach, durch

$$\frac{a\mathfrak{n}^2}{2} - \frac{A N \mu q}{m}\,\frac{a\mathfrak{n}}{2}$$

darzustellen ist, während die zweite Kreisbewegung der Beschleunigung

$$\frac{a\mathfrak{n}^2}{2} + \frac{A N \mu q}{m}\,\frac{a\mathfrak{n}}{2}$$

unterworfen ist. Wird nun durch c^* die Bahngeschwindigkeit für Bewegung (*), durch T^* die entsprechende Schwingungsperiode bezeichnet, so hat man

$$\frac{a\mathfrak{n}^2}{2} - \frac{A N \mu q}{m}\,\frac{a\mathfrak{n}}{2} = \frac{(c^*)^2}{\frac{a}{2}}$$

zu setzen, also:

$$\mathfrak{n}^2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{A N \mu q}{m}\mathfrak{n}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = (c^*)^2,$$

$$= \frac{\left(2\pi\frac{a}{2}\right)^2}{(T^*)^2},$$

oder noch

$$\mathfrak{n}^2 - \frac{A N \mu q}{m}\mathfrak{n} = \frac{4\pi^2}{(T^*)^2},$$

d. h.

$$T^* = \frac{2\pi}{\mathfrak{n}}\left(1 + \frac{A N \mu q}{2\mathfrak{n} m}\right),$$

$$= T\left(1 + \frac{A N \mu q}{2\sqrt{m k^2}}\right).$$

Auf ähnliche Weise, wenn durch T^{**} die Umlaufsperiode für die Kreisbewegung (**) bezeichnet wird, erhalten wir

$$T^{**} = T\left(1 - \frac{A N \mu q}{2\sqrt{m k^2}}\right).$$

Folgendes ist also das Resultat unserer Überlegung:

1. die betrachtete geradlinige Bewegung wird durch die Wirkung des magnetischen Feldes in drei Partialschwingungen aufgelöst;
2. die eine ist geradlinig, behält die frühere Periode bei, und läuft der Feldrichtung parallel;
3. die anderen sind kreisförmige Bewegungen und gehen in einer zum Felde senkrechten Ebene vor sich, haben entgegengesetzte Sinne und werden von der magnetischen Kraft beschleunigt bzw. verzögert.

Betrachten wir nun das Phänomen in einer zu den Kraftlinien senkrechten Richtung, so müssen wir eben drei geradlinige Schwingungen beobachten, deren Schwingungsrichtungen der Fig. 13 genau entsprechen.

Pflanzt sich dagegen der Strahl in der Feldrichtung fort, so können nur zwei Kreisschwingungen zum Vorschein kommen, was wieder mit den Erfahrungsergebnissen übereinstimmt. Hierzu ist aber noch folgendes zu bemerken.

Stellen wir uns auf die positive Seite der z-Achse, so werden wir den magnetisierenden Strom entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne fließen sehen. Die Bewegung (*), welche die verzögerte Kreisschwingung darstellt, geht nun in genau derselben

Weise vor sich. Dies steht aber mit der Erfahrung in Widerspruch (I. Vorl. § 11). Eine befriedigende Übereinstimmung kann man nun wieder herstellen, wenn man die Ladung q als eine negative Größe betrachtet; es ist also das im fünften Paragraphen dieser Vorlesung geschilderte Modell ein passendes, und es stellt sogar das einzige zulässige elektrostatische Bild der materiellen Atome dar.

§ 7. Bevor wir zur Betrachtung von komplizierten Systemen übergehen, wollen wir noch eine Frage von fundamentaler Bedeutung erläutern.

Zwei elektrische Teilchen $q \cdot q'$ üben bekanntlich, wenn sie in Ruhe sind, aufeinander eine Kraft aus, welche nach dem Coulombschen Gesetz zu

$$\frac{q\,q'}{\varepsilon r^2}$$

sich berechnen läßt. Tritt aber Bewegung ein, so kommt, wie bemerkt, eine neue Kraft mit den Komponenten

$$X = A\mu q(M\gamma - N\beta) = A^2\mu q\left[\gamma\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right) - \beta\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right)\right],$$

$$Y = A\mu q(N\alpha - L\gamma) = A^2\mu q\left[\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) - \gamma\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right)\right],$$

$$Z = A\mu q(L\beta - M\alpha) = A^2\mu q\left[\beta\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) - \alpha\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]$$

hinzu. Es ist nun interessant zu entscheiden, ob die elektrostatische oder die elektrodynamische Kraft die überwiegende ist.

Dazu konstatieren wir, daß beim Entwickeln

$$X = A^2\mu q\gamma\left[q'\gamma'\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} - q'\alpha'\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right] - A^2\mu q\beta\left[q'\alpha'\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} - q'\beta'\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\right],$$

$$(5)\quad = A^2\mu q\gamma\left[-\frac{q'\gamma'}{r^2}\frac{x-x'}{r} + \frac{q'\alpha'}{r^2}\frac{z-z'}{r}\right] - A^2\mu q\beta\left[-\frac{q'\alpha'}{r^2}\frac{y-y'}{r} + \frac{q'\beta'}{r^2}\frac{x-x'}{r}\right],$$

usw. wird. Sind nun die Schwingungen geradlinig, und nennt man s resp. s' die Verrückungen, welche q und q' entsprechen, so wird

$$x = a_1 \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta) = l \cos(s, x) \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta),$$
$$y = a_2 \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta) = l \cos(s, y) \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta),$$
$$z = a_3 \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta) = l \cos(s, z) \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta),$$

$$x' = a_1' \sin(\mathfrak{n}' t + \vartheta') = l' \cos(s', x) \sin(\mathfrak{n}' t + \vartheta'),$$
$$y' = a_2' \sin(\mathfrak{n}' t + \vartheta') = l' \cos(s', y) \sin(\mathfrak{n}' t + \vartheta'),$$
$$z' = a_3' \sin(\mathfrak{n}' t + \vartheta') = l' \cos(s', z) \sin(\mathfrak{n}' t + \vartheta'),$$

und daher

$$\alpha = \dot{x} = \dot{s} \cos(s, x) = l \mathfrak{n} \cos(\mathfrak{n} t + \vartheta) \cos(s, x),$$
$$\beta = \dot{y} = \dot{s} \cos(s, y) = l \mathfrak{n} \cos(\mathfrak{n} t + \vartheta) \cos(s, y),$$
$$\gamma = \dot{z} = \dot{s} \cos(s, z) = l \mathfrak{n} \cos(\mathfrak{n} t + \vartheta) \cos(s, z),$$
$$\alpha' = \dot{x}' = \dot{s}' \cos(s', x) = l' \mathfrak{n}' \cos(\mathfrak{n}' t + \vartheta') \cos(s', x),$$
$$\beta' = \dot{y}' = \dot{s}' \cos(s', y) = l' \mathfrak{n}' \cos(\mathfrak{n}' t + \vartheta') \cos(s', y),$$
$$\gamma' = \dot{z}' = \dot{s}' \cos(s', z) = l' \mathfrak{n}' \cos(\mathfrak{n}' t + \vartheta') \cos(s', z).$$

Damit formen sich aber die elektrodynamischen Kräfte um, und werden zu

$$X = \frac{A^2 \mu q q' l l' \mathfrak{n} \mathfrak{n}' \cos(\mathfrak{n} t + \vartheta) \cos(\mathfrak{n}' t + \vartheta')}{r^2} [- \cos(s, z) \cos(s', z) \cos(r, x)$$
$$+ \cos(s, z) \cos(s', x) \cos(r, z) + \cos(s, y) \cos(s', x) \cos(r, y)$$
$$- \cos(s, y) \cos(s', y) \cos(r, x)],$$

$$= \frac{A^2 \mu q q' l l' \mathfrak{n} \mathfrak{n}' \cos(\mathfrak{n} t + \vartheta) \cos(\mathfrak{n}' t + \vartheta')}{r^2} [\cos(s', x) \cos(s, r)$$
$$- \cos(r, x) \cos(s, s')],$$

usw. Zur Erledigung unserer Frage haben wir also die Größe

$$A^2 l l' \mathfrak{n} \mathfrak{n}'$$

mit der Einheit zu vergleichen. Um darauf einzugehen merke man, daß

$$\mathfrak{n} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\Delta \Delta},$$

$$\mathfrak{n}' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{\Delta \Delta'}$$

ist, und daher

$$A^2 l l' \mathfrak{n} \mathfrak{n}' = 4\pi^2 \frac{l l'}{\Delta \Delta'},$$

oder, nach der achten Vorlesung (§ 13), für Lichtschwingungen etwa

$$A^2 l l' n n' = 4\pi^2 10^{-6}.$$

Bei der Berechnung zusammengesetzter Teilchensysteme ist also die elektrodynamische Kraft gegen die elektrostatische zu vernachlässigen.[1])

Die Theorie, die wir in den nächsten Vorlesungen entwickeln werden, darf man daher mit Recht als eine elektrostatische bezeichnen.

Siebzehnte Vorlesung.

Stoneys Erklärung der Doublet- und Serienspektren.

§ 1—2. Vorbemerkungen. — § 3. Einfluß einer apsidalen Störung auf das Spektrum. — § 4—5. Einfluß einer präzessionalen Störung. — § 6. Periodische Änderung der Bahnneigung. — § 7. Schwankungen der Elliptizität. — § 8. Andersartige Störungen. — § 9. Erklärung der Serienspektren. — § 10. Das Natriumspektrum. — § 11. Schluß.

§ 1. Wir betrachten ein System elektrischer Teilchen und nehmen an, daß jedes Teilchen für sich eine Pendelschwingung ausführen würde. Was die Störungen betrifft, welche von den übrigbleibenden Teilchen herrühren, so wird weiter angenommen, daß die reelle Bahn als die Übereinander-

---

[1]) Gehen die beiden Teilchen zur Zeit t durch die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(r, 0, 0)$, und sind ihre Geschwindigkeiten einander gleich und der x-Achse parallel, so hat man in (5)

$$x = 0, \qquad x' = r,$$
$$\gamma = \gamma', \qquad \alpha' = \beta = \beta' = 0$$

zu setzen; dann wird

$$X = A^2 \mu \gamma^2 \frac{q q'}{r^2},$$

und in der Luft

$$X = A^2 \gamma^2 \frac{q q'}{r^2}.$$

Die elektrodynamische Anziehungskraft hält also der Coulombschen Abstoßung das Gleichgewicht, wenn die Bahngeschwindigkeit der Teilchen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen gleich wird.

lagerung von elliptischen Partialschwingungen zu betrachten ist; dabei soll jede Partialbahn den störenden Wirkungen unterworfen sein, welche uns aus Mond- und Planetenbewegungen gut bekannt worden sind.

Es wird also jede Partiale folgende Störungen erleiden:

1. eine (apsidale) Bewegung in der Bahnebene;
2. eine (präzessionale) Verrückung der Knotenlinie, d. h. der geraden Linie, nach welcher die Bahnebene die unveränderliche Ebene schneidet;
3. eine periodische Änderung der Bahnneigung;
4. eine periodische Änderung der Elliptizität.

§ 2. Nach der sechzehnten Vorlesung (§ 5) darf man für jede (ungestörte) Partialschwingung

$$x = a_1 \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta_1),$$
$$y = a_2 \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta_2),$$
$$z = 0$$

setzen.

Werden nun die Achsen x und y, in ihrer eigenen Ebene, um den Winkel ω gedreht, so hat man statt x und y

$$x \cos\omega - y \sin\omega,$$

bzw.

$$x \sin\omega + y \cos\omega$$

zu schreiben. Damit wird aber die Bahngleichung zu

$$a_1^2 a_2^2 \sin^2(\vartheta_1 - \vartheta_2) = a_2^2 (x\cos\omega - y\sin\omega)^2$$
$$- 2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)(x\cos\omega - y\sin\omega)(x\sin\omega + y\cos\omega)$$
$$+ a_1^2 (x\sin\omega + y\cos\omega)^2.$$

Der Koeffizient von xy nimmt also die Form an

$$a_1^2 \sin 2\omega - a_2^2 \sin 2\omega - 2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)\cos 2\omega;$$

die neu eingeführten Koordinatenachsen stimmen hiernach mit den Bahnachsen überein, wenn

$$a_1^2 \sin 2\omega - a_2^2 \sin 2\omega - 2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)\cos 2\omega = 0,$$

d. h.

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2 a_1 a_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{a_1^2 - a_2^2}$$

ist. Werden daher die Achsen der Ellipse zu Koordinatenachsen gewählt, so muß

$$\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0, \qquad \vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$$

sein. Damit erhält man

$$x = a_1 \cos(\mathfrak{n} t + \vartheta_2),$$
$$y = a_2 \sin(\mathfrak{n} t + \vartheta_2),$$

und bei passender Wahl des Zeitnullpunktes

$$x = a_1 \cos \mathfrak{n} t,$$
$$y = a_2 \sin \mathfrak{n} t,$$

welche Gleichungen wir, der Einfachheit halber in der Form

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a \cos \mathfrak{n} t, \\ y = b \sin \mathfrak{n} t \end{cases}$$

schreiben wollen.

Wäre die betrachtete Partialschwingung allein vorhanden, so würde man als Maß der Bewegungsenergie

$$a^2 + b^2$$

betrachten dürfen; das ausgestrahlte Spektrum enthält dabei eine einzige Linie, mit der Schwingungszahl

$$\nu = \frac{\mathfrak{n}}{2\pi}.$$

§ 3. Jetzt fragen wir uns, wie dies einfache Spektrum durch die apsidale Bewegung der Bahn in ihrer eigenen Ebene beeinflußt wird.

Um die Frage zu behandeln, ziehen wir zwei Koordinatenachsen (OX und OY) durch den Mittelpunkt der Ellipse, setzen

$$XOx = YOy = \mathfrak{n}' t,$$
$$\mathfrak{n}' = 2\pi \nu',$$

und betrachten OX und OY als unbeweglich. Die elliptische Bahn wird sich, der apsidalen Bewegung folgend, ν'-mal in einer Sekunde um ihren Mittelpunkt drehen.

Die Koordinaten X und Y des schwingenden Teilchens nach den neuen festen Achsen sind nun

$$X = a \cos \mathfrak{n} t \cos \mathfrak{n}' t - b \sin \mathfrak{n} t \sin \mathfrak{n}' t,$$
$$Y = a \cos \mathfrak{n} t \sin \mathfrak{n}' t + b \sin \mathfrak{n} t \cos \mathfrak{n}' t,$$

oder, was dasselbe bedeutet

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \frac{a+b}{2} \cos(\mathfrak{n} + \mathfrak{n}') t + \frac{a-b}{2} \cos(\mathfrak{n} - \mathfrak{n}') t, \\ Y = \frac{a+b}{2} \sin(\mathfrak{n} + \mathfrak{n}') t - \frac{a-b}{2} \sin(\mathfrak{n} - \mathfrak{n}') t; \end{cases}$$

anders gesagt, wird

$$X = X_1 + X_2,$$
$$Y = Y_1 + Y_2,$$

mit

$$\text{(3a)} \quad \begin{cases} X_1 = + \frac{a+b}{2} \cos(n + n')t, \\ Y_1 = + \frac{a+b}{2} \sin(n + n')t, \end{cases}$$

$$\text{(3b)} \quad \begin{cases} X_2 = + \frac{a-b}{2} \cos(n - n')t, \\ Y_2 = - \frac{a-b}{2} \sin(n - n')t. \end{cases}$$

Hieraus schließen wir, daß eine elliptische Bewegung mit der Schwingungszahl $\frac{1}{\vartheta}$, einer apsidalen Störung mit der Schwingungszahl $\frac{1}{\vartheta'}$ unterworfen, durch die Zusammensetzung von zwei Kreisbewegungen zu beschreiben ist, welche in den Gleichungen (3a) und (3b) ihre Ausdrücke finden.

Die Kreisbewegungen finden in entgegengesetztem Sinne statt, dabei betragen die Schwingungszahlen $\frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta'}$ und $\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta'}$, und die Halbdurchmesser $(a + b)/2$ und $(a - b)/2$.

Die einzige Linie, die vorher das Spektrum bildete, spaltet sich jetzt zu einem Doublet und dabei stehen die Intensitäten der abgesonderten Strahlen im Verhältnis von $(a + b)^2$ zu $(a - b)^2$.

Es ist ausdrücklich zu betonen, daß die Gleichungen (3a) und (3b), unter der Annahme abgeleitet wurden, daß die apsidale Bewegung in demselben Sinne wie die elliptische stattfinde. Wäre dies nicht der Fall, so hätten wir ganz einfach $-n'$ statt n' zu schreiben.

Gehen die apsidale und die elliptische Bewegung in demselben Sinne vor sich ($n' > 0$), so wird die brechbarste Linie

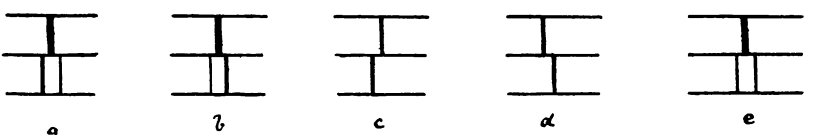


Fig. 58.

im Doublet, deren Schwingungszahl $\frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta'}$ ist, als die hellere und breitere im Vergleich mit der anderen erscheinen (Fig. 58a). Erhält im Gegenteil n' das Minuszeichen, so vertauschen die

Linien ihre Intensitäten (Fig. 58 *b*). Formt sich aber zufälligerweise die elliptische Bahn zu einem Kreise um, so fällt offenbar eine der Linien im Doublet von selbst aus (Fig. 58 *c* u. *d*). Wird endlich die ungestörte Partiale zu einer geradlinigen, so nehmen die Linien im Doublet genau dieselbe Intensität an (Fig. 58 *e*).

§ 4. Bis jetzt haben wir die Bewegungsebene als eine im Raume festliegende betrachtet; dies kann aber im allgemeinen nicht der Fall sein. Vielmehr müßten wir annehmen, daß die Bahnebene keine festliegende sein kann, so daß wir ihrer Bewegung gegen die sogenannte unveränderliche Ebene des Systems Rechnung zu tragen haben.

Dazu ziehen wir eine zur unveränderlichen Ebene senkrechte Gerade, welche die unveränderliche Achse heißen soll, und fragen uns wie das Spektrum durch eine Drehung der Bahnebene um jene Achse beeinflußt wird. Der Kürze halber wollen wir dabei mit B die Bahn-, mit A aber die unveränderliche Ebene bezeichnen. Die Gleichungen der apsidalen Bewegung (3a und 3b) schreiben wir jetzt in der Form

$$\text{(4a)} \qquad \begin{cases} X_1 = + s \cos S t, \\ Y_1 = + s \sin S t, \end{cases}$$

$$\text{(4b)} \qquad \begin{cases} X_2 = + d \cos D t, \\ Y_2 = - d \sin D t; \end{cases}$$

setzen also

$$(a + b)/2 = s, \quad (a - b)/2 = d, \quad \pi + \pi' = S, \quad \pi - \pi' = D,$$

und ziehen dann durch den Mittelpunkt der Bahn ein neues Koordinatensystem.

Es sei die z-Achse mit der unveränderlichen Linie kongruent, und es decke sich die x-Achse mit der Geraden, in welcher die Ebenen A und B zur Zeit t sich schneiden; in der festen Ebene A, und zu der Ox-Achse senkrecht, ziehen wir endlich die y-Achse.

Aus diesen Festsetzungen leitet man ganz einfach, nach den Gleichungen (4a) ab

$$\text{(5a)} \qquad x_1 = s \cos S t,$$

$$\text{(5b)} \qquad y_1 = s \sin S t \cos \omega,$$

$$\text{(5c)} \qquad z_1 = s \sin S t \sin \omega,$$

wo mit ω der Winkel zwischen den Ebenen A und B gemeint ist.

Kommt nun die präzessionale Bewegung in Betracht, so hat man etwa

$$\mathfrak{x}_1 = x_1 \cos \mathfrak{n}'' t - y_1 \sin \mathfrak{n}'' t,$$
$$\mathfrak{y}_1 = x_1 \sin \mathfrak{n}'' t + y_1 \cos \mathfrak{n}'' t$$

zu setzen, d. h.

$$\mathfrak{x}_1 = s \cos St \cos \mathfrak{n}'' t - s \sin St \sin \mathfrak{n}'' t \cos \omega,$$
$$\mathfrak{y}_1 = s \cos St \sin \mathfrak{n}'' t + s \sin St \cos \mathfrak{n}'' t \cos \omega,$$

oder noch, nach leicht zu verstehenden Umformungen

$$\mathfrak{x}_1 = s \cos St \cos \mathfrak{n}'' t \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$$
$$- s \sin St \sin \mathfrak{n}'' t \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2}\right),$$
$$= s \cos^2 \frac{\omega}{2} (\cos St \cos \mathfrak{n}'' t - \sin St \sin \mathfrak{n}'' t)$$
$$+ s \sin^2 \frac{\omega}{2} (\cos St \cos \mathfrak{n}'' t + \sin St \sin \mathfrak{n}'' t),$$
$$= s \cos^2 \frac{\omega}{2} \cos (S + \mathfrak{n}'') t + s \sin^2 \frac{\omega}{2} \cos (S - \mathfrak{n}'') t,$$

und ähnlich

$$\mathfrak{y}_1 = s \cos^2 \frac{\omega}{2} \sin (S + \mathfrak{n}'') t - s \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin (S - \mathfrak{n}'') t.$$

Die Kreisbewegung (4a) löst sich also in folgende Partialen auf

(5c) $$z_1 = s \sin St \sin \omega,$$

(6a)
$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1' = s \cos^2 \frac{\omega}{2} \cos (S + \mathfrak{n}'') t, \\ \mathfrak{y}_1' = s \cos^2 \frac{\omega}{2} \sin (S + \mathfrak{n}'') t, \end{cases}$$

(6b)
$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1'' = s \sin^2 \frac{\omega}{2} \cos (S - \mathfrak{n}'') t, \\ \mathfrak{y}_1'' = - s \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin (S - \mathfrak{n}'') t. \end{cases}$$

Wie leicht zu ersehen definiert (5c) eine geradlinige Pendelschwingung, welche senkrecht zur festen Ebene A, mit der Schwingungszahl $\mathfrak{z} + \mathfrak{z}'$ stattfindet; durch (6a) und (6b) werden

dagegen zwei Kreisbewegungen dargestellt mit den Schwingungszahlen $\mathfrak{z} + \mathfrak{z}' + \mathfrak{z}''$ bzw. $\mathfrak{z} + \mathfrak{z}' - \mathfrak{z}''$.

Was die Intensitäten betrifft, so stehen sie offenbar in denselben Verhältnissen wie die Zahlen

$$4 s^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \cos^2 \frac{\omega}{2} \ldots\ldots\ldots (5c)$$

$$2 s^2 \cos^4 \frac{\omega}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (6a)$$

$$2 s^2 \sin^4 \frac{\omega}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (6b).$$

Ist der Winkel ω ein sehr kleiner, oder, was dasselbe bedeutet, ist die Neigung der B-Ebene gegen A eine kaum merkbare, so wird die Linie (6a) eine sehr starke, die (5c) eine schwache, die (6b) eine äußerst schwache.

In ganz ähnlicher Weise können wir die Störungen berechnen, welche die Präzession bei der Kreisbewegung hervorruft, die durch die Gleichungen (4b) definiert ist.

Man findet

$$z_2 = - d \sin D t \sin \omega, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{X}_2' = d \cos^2 \frac{\omega}{2} \cos (D - \mathfrak{n}') t, \\ \mathfrak{Y}_2' = - d \cos^2 \frac{\omega}{2} \sin (D - \mathfrak{n}'') t, \end{cases} \tag{8a}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{X}_2'' = d \sin^2 \frac{\omega}{2} \cos (D + \mathfrak{n}'') t, \\ \mathfrak{Y}_2'' = d \sin^2 \frac{\omega}{2} \sin (D + \mathfrak{n}'') t; \end{cases} \tag{8b}$$

es werden also wieder drei Linien emittiert, welchen die Schwingungszahlen $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'$ bzw. $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}' - \mathfrak{z}''$ und $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}' + \mathfrak{z}''$ entsprechen.

Den neuen Linien sind natürlich die Intensitäten

$$4 d^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \cos^2 \frac{\omega}{2} \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$2 d^2 \cos^4 \frac{\omega}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (8a)$$

$$2 d^2 \sin^4 \frac{\omega}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (8b)$$

zuzuschreiben, unter welchen (bei kleiner Bahnneigung) die zweite groß, die erste klein, und die dritte äußerst klein sein

wird. Es ist hierbei zu bemerken, daß in unseren Formeln die Konstante n'' dasselbe Zeichen wie n und n' erhalten hat; wäre dies nicht der Fall, so hätte man ganz einfach $-n''$ statt n'' zu setzen. Es treten daher vier verschiedene Arten der gestörten Bewegung hervor.

Erstens können wir festsetzen, daß, wie es stillschweigend bei vorigen Rechnungen angenommen wurde, den drei Größen n, n' und n'' ein und dasselbe Vorzeichen zukomme; dann haben die sechs sich ergebenden Linien die Intensitätsverhältnisse, die wir eben berechneten. Was der Fig. 59 *a* entspricht. Zweitens nehmen wir an es komme der Drehung n'' das ent-

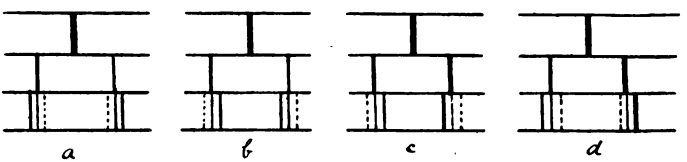


Fig. 59.

gegengesetzte Vorzeichen wie den n und n' zu; dann vertauschen offenbar die Linien

$$\begin{array}{ll} \delta + \delta' + \delta'' & \delta - \delta' + \delta'' \\ \delta + \delta' - \delta'' & \delta - \delta' - \delta'' \end{array}$$

ihre Intensitäten (Fig. 59 *b*).

Drittens kann man die einzige apsidale Bewegung als rückgängig betrachten; dann ist n und $n'' > 0$, $n' < 0$. Das Spektrum, das sich ergibt, ist aus Fig. 59 *c* zu ersehen.

Finden endlich, sowohl die apsidale als die präzessionale Störung in entgegengesetzter Richtung wie die elliptische Bewegung statt, so wechseln offenbar in Fig. 59 *c* die Linien

$$\begin{array}{ll} \delta + \delta' - \delta'' & \delta - \delta' - \delta'' \\ \delta + \delta' + \delta'' & \delta - \delta' + \delta'' \end{array}$$

ihre Intensitäten (Fig. 59 *d*).

Die Figuren stellen selbstverständlich den Vorgang unter der Annahme dar, daß die apsidale und präzessionale Störung klein gegen die elliptische Bewegung sind. In dem betrachteten Falle liegt der Satellit (d. h. die schwächste Linie) in jedem Triplet auf der entgegensetzten Seite wie die Hauptlinie, und

die Hauptlinien selbst werden durch die präzessionale Störung in umgekehrten Richtungen verrückt.

Wäre dagegen die apsidale Bewegung eine sehr rasche, so müßte man eine langsame Bahnbewegung annehmen, um die Entstehung von Linienpaaren erklären zu können. Das ist allerdings recht unwahrscheinlich, und darauf soll auch nicht eingegangen werden; wir begnügen uns zu bemerken, daß unter solchen Umständen die Satelliten in jedem Triplet auf derselben Seite wie die Hauptlinien liegen würden, und daß die Hauptlinien durch Präzession nach einer gemeinsamen Richtung verschoben würden.

§ 5. Findet eine elliptische Partialbewegung unter rein präzessionalen Störungen statt, so bleiben offenbar von den sechs Linien

$$\begin{array}{ll} \delta + \delta' & \delta - \delta' \\ \delta + \delta' + \delta'' & \delta - \delta' - \delta'' \\ \delta + \delta' - \delta'' & \delta - \delta' + \delta'' \end{array}$$

nur drei, nämlich δ, $\delta + \delta''$ und $\delta - \delta''$, übrig. Die Urlinie hat sich also zu einem Triplet aufgelöst, in welchem die Schwingungsdifferenz vom ersten zum zweiten, und vom zweiten zum dritten Glied dieselbe ist.

§ 6. Nach dem Plane unserer Untersuchung (diese Vorl. § 1) haben wir jetzt zu erforschen, wie eine periodische Änderung der Bahnneigung auf das ermittelte Spektrum einwirken muß.

Dazu setzen wir, etwa in die Formeln (5 c), (6 a) u. (6 b) für ω

$$g + h \sin \eta t;$$

dann wird, um ein besonderes Beispiel zu betrachten

$$z_1 = s \sin St \sin (g + h \sin \eta t).$$

Wir wollen jetzt mit β den Wert bezeichnen den ηt für $t = \tau$ erhält; dann bekommt man für die nächstfolgenden Zeiten

$$\begin{aligned} \sin \eta t &= \sin \beta + \cos \beta \,.\, d\eta t, \\ &= \sin \beta + \eta \cos \beta \,.\, dt, \\ &= \sin \beta + \eta \cos \beta \,.\, (t - \tau), \\ &= \sin \beta - \eta \tau \cos \beta + \eta \cos \beta \,.\, t; \end{aligned}$$

also:

$$z_1 = s \sin S t \sin (g + h \sin \beta - h \eta \tau \cos \beta + h \eta \cos \beta \,.\, t),$$
$$= s \sin S t \sin (h \eta \cos \beta \,.\, t + \vartheta),$$
$$(9a) \quad = \frac{s}{2} \cos [(S - h \eta \cos \beta) t - \vartheta] - \frac{s}{2} \cos [(S + h \eta \cos \beta) t + \vartheta].$$

Für $t = \tau$ emittiert also das schwingende Teilchen zwei Linien mit den Schwingungszahlen

$$\frac{}{\delta} + \frac{}{\delta}' - \frac{h \eta \cos \beta}{2 \pi}$$

und

$$\frac{}{\delta} + \frac{}{\delta}' + \frac{h \eta \cos \beta}{2 \pi}.$$

Denken wir uns die ganze Periode $2 \pi / \eta$ in gleiche Intervalle geteilt, so werden nach der vorigen Rechnung ebensoviele Linienpaare im Spektrum vorkommen; kurz gesagt: es verbreitert sich die Linie $\frac{}{\delta} + \frac{}{\delta}'$ zu einem Streifen, dessen Grenzen den Schwingungszahlen

$$\frac{}{\delta} + \frac{}{\delta}' - \frac{h \eta}{2 \pi}$$

und

$$\frac{}{\delta} + \frac{}{\delta}' + \frac{h \eta}{2 \pi}$$

entsprechen.

Auf ganz ähnliche Weise erhält man aus der ersten unter den Gleichungen (6a)

$$\mathfrak{X}_1' = s \cos^2 \frac{\omega}{2} \cos (S + \mathfrak{n}'') t,$$
$$= s \cos^2 \frac{h \eta \cos \beta \,.\, t + \vartheta}{2} \cos (S + \mathfrak{n}'') t,$$
$$= \frac{s}{2} [1 + \cos (h \eta \cos \beta \,.\, t + \vartheta)] \cos (S + \mathfrak{n}'') t.$$
$$= \frac{s}{2} \cos (S + \mathfrak{n}'') t + \frac{s}{2} \cos (h \eta \cos \beta \,.\, t + \vartheta) \cos (S + \mathfrak{n}'') t,$$
$$= \frac{s}{2} \cos (S + \mathfrak{n}'') t + \frac{s}{4} \cos [(S + \mathfrak{n}'' + h \eta \cos \beta) t + \vartheta]$$
$$+ \frac{s}{4} \cos [(S + \mathfrak{n}'' - h \eta \cos \beta) t - \vartheta],$$

woraus dieselben Folgerungen wie vorher abzuleiten sind. Durch die Schwankung der Bahnneigung wird also jede Linie ein wenig verbreitert.

§ 7. Schwankungen der Elliptizität können wir zweierlei betrachten; die eine Störung läßt die Bahn um die Form einer geraden Linie schwingen, die andere um die eines Kreises.

Der Vorgang erster Art kommt zur Darstellung, indem in die Gleichungen (1) für a und b, $r\cos\varepsilon t$ bezw. $r\sin\varepsilon t$ eingeführt wird.

Damit erhält man

$$x = r\cos\varepsilon t\cos\mathfrak{n} t,$$
$$y = r\sin\varepsilon t\sin\mathfrak{n} t,$$

d. h.

$$\begin{cases} x = \frac{r}{2}[\cos(\mathfrak{n}-\varepsilon)t + \cos(\mathfrak{n}+\varepsilon)t], \\ y = \frac{r}{2}[\cos(\mathfrak{n}-\varepsilon)t - \cos(\mathfrak{n}+\varepsilon)t]; \end{cases}$$

diese Gleichungen stellen aber zwei geradlinige aufeinander senkrechte Pendelbewegungen dar mit den Schwingungszahlen

$$\frac{\mathfrak{n}}{2\pi} - \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

und

$$\frac{\mathfrak{n}}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Die einzige Linie, die früher das Spektrum bildete, hat sich also zu einem Doublet aufgelöst, welches zwei Linien von gleicher Intensität enthält.

Soll nun die Ellipse durch die Form eines Kreises hindurchgehen, so haben wir für a und b, $r + \varrho\cos\varepsilon t$ und $r - \varrho\sin\varepsilon t$ zu setzen, wodurch

$$x = (r + \varrho\cos\varepsilon t)\cos\mathfrak{n} t,$$
$$y = (r - \varrho\sin\varepsilon t)\sin\mathfrak{n} t,$$

oder noch

$$\begin{cases} x = r\cos\mathfrak{n} t + \frac{\varrho}{2}[\cos(\mathfrak{n}-\varepsilon)t + \cos(\mathfrak{n}+\varepsilon)t], \\ y = r\sin\mathfrak{n} t - \frac{\varrho}{2}[\cos(\mathfrak{n}-\varepsilon)t - \cos(\mathfrak{n}+\varepsilon)t] \end{cases}$$

erhalten wird. Der früheren Linie gesellen sich hier rechts und links zwei Satelliten bei, mit den Schwingungszahlen:

$$\frac{\mathfrak{n}}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

und

$$\frac{\mathfrak{n}}{2\pi} - \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

§ 8. Eine weitere Art der Störungen kann wohl in einer regelmäßigen Folge von Ausdehnungen und Zusammenziehungen der Bahn bestehen. Um den neuen Prozeß zu beschreiben setze man

$$x = a \cos \varepsilon t \cos \mathfrak{n} t,$$
$$y = b \cos \varepsilon t \sin \mathfrak{n} t,$$

also:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \cos (\mathfrak{n} + \varepsilon) t + \frac{a}{2} \cos (\mathfrak{n} - \varepsilon) t, \\ y = \frac{b}{2} \sin (\mathfrak{n} + \varepsilon) t + \frac{b}{2} \sin (\mathfrak{n} - \varepsilon) t. \end{cases}$$

Hieraus wird aber

$$x = x_1 + x_2,$$
$$y = y_1 + y_2,$$

mit

*) $$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \cos S t, \\ y_1 = \frac{b}{2} \sin S t, \end{cases} \qquad (**) \begin{cases} x_2 = \frac{a}{2} \cos D t, \\ y_2 = \frac{b}{2} \sin D t, \end{cases}$$

$$S = \mathfrak{n} + \varepsilon, \qquad D = \mathfrak{n} - \varepsilon.$$

Wirkt dabei noch eine apsidale Störung mit der Schwingungszahl $\frac{1}{\vartheta}'$, so löst sich jede Linie, wie bekannt, zu einem Doublet

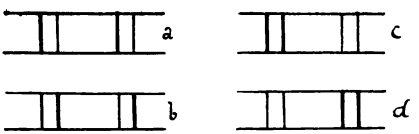


Fig. 60.

(diese Vorl. § 3) auf; wir bekommen also ein Spektrum mit vier Linien, welche folgende Schwingungszahlen bezw. Intensitäten besitzen.

$\frac{1}{\vartheta} + \varepsilon / 2\pi + \frac{1}{\vartheta}'$	$(a + b)^2 / 8$
$\frac{1}{\vartheta} - \varepsilon / 2\pi + \frac{1}{\vartheta}'$	$(a + b)^2 / 8$
$\frac{1}{\vartheta} + \varepsilon / 2\pi - \frac{1}{\vartheta}'$	$(a - b)^2 / 8$
$\frac{1}{\vartheta} - \varepsilon / 2\pi - \frac{1}{\vartheta}'$	$(a - b)^2 / 8$;

die Spektren die in den verschiedenen Fällen sich ergeben, sind in Fig. 60 dargestellt. Hierzu ist zu bemerken, daß in Fig. 60a und 60b ist $\varepsilon / 2\pi$ größer als $\frac{1}{\vartheta}'$ angenommen; in Fig. 60c und 60d dagegen soll $\varepsilon / 2\pi < \frac{1}{\vartheta}'$ sein.

§ 9. Im ersten Paragraphen dieser Vorlesung ist angenommen worden, daß die wirkliche Bahn des betrachteten schwingenden Teilchens als die Übereinanderlagerung von elliptischen Partialschwingungen zu betrachten ist. Jetzt soll aber bewiesen werden, daß in der betreffenden Annahme keine etwaige Einschränkung des Bewegungsprozesses steckt.

Dabei betrachten wir, um den Beweis zu führen, eine ebene Bewegung, was indessen, wie leicht zu ersehen, kein prinzipielles Hindernis bietet.

Es sei also

$$x = F_1(t),$$
$$y = F_2(t)$$

gegeben; nach dem Fourier'schen Lehrsatz darf man

$$x = A_0 + A_1 \cos \mathfrak{n}_1 t + A_2 \cos \mathfrak{n}_2 t + \ldots + B_1 \sin \mathfrak{n}_1 t + B_2 \sin \mathfrak{n}_2 t + \ldots,$$
$$y = C_0 + C_1 \cos \mathfrak{n}_1 t + C_2 \cos \mathfrak{n}_2 t + \ldots + D_1 \sin \mathfrak{n}_1 t + D_2 \sin \mathfrak{n}_2 t + \ldots$$

schreiben. Nun läßt sich zeigen, daß die vier Glieder, welche einer und derselben Vertikalreihe angehören, eine elliptische Schwingung darstellen.

Man setze nämlich, bei Vernachlässigung der numerischen Kennzeichen

$$x = A \cos \mathfrak{n} t + B \sin \mathfrak{n} t,$$
$$y = C \cos \mathfrak{n} t + D \sin \mathfrak{n} t$$

und vergleiche diese Formeln mit den Gleichungen (*) (XVI. Vorl. § 5); der angegebene Satz wird ohne weiteres folgen.

§ 10. Stoneys Theorie gestattet nun, etwa für das Natriumatom ein gut bestimmtes Modell zu entwerfen. Wir dürfen z. B. annehmen, es gebe in jenem System dreierlei schwingende Teilchen; die Teilchen der ersten Art würden dabei die Hauptserie ausstrahlen (I. Vorl. § 3), die der zweiten und dritten Art die erste bzw. die zweite Nebenserie emittieren. Über die Bewegungen, welche die Teilchen ausführen, dürfen wir folgendes feststellen:

1. Zweite Nebenserie. Da die Doublets keine Satelliten zeigen, muß die Schwingung eine ebene sein; dabei dreht sich die Bahn in ihrer Ebene, ohne Veränderungen der

Form zu erleiden, woraus die Gleichheit der Schwingungsdifferenzen für jedes Doublet folgt. Die elliptischen Partialen müssen übrigens alle nach demselben Sinn erfolgen, während die apsidale Bewegung das Minuszeichen erhält, dies ist auch der Grund, weshalb in jedem Paare die brechbarste Linie als schwächer erscheint.

2. Erste Nebenserie. Die Bewegung hat mit der vorigen eine große Ähnlichkeit; jedoch deutet die Tatsache, daß die Linien verbreitert erscheinen, darauf hin, daß die Drehungsgeschwindigkeit der Bahn wahrscheinlich keine streng konstante ist.
3. Hauptserie. In der Hauptserie kommen einzelne Linien vor; es ist das ein Beweis dafür, daß manche Partialen reine Kreisschwingungen sind. Für die elliptischen Partialen finden nun Bahnbewegung und apsidale Störung in derselben Richtung statt; deswegen ist auch in jedem Doublet die brechbarste Linie stärker als ihre Nachbarin.

Wir können sogar etwas Näheres angeben über die Partiale, welche den *D*-Linien entspricht. Die Intensitäten dieser Linien stehen nämlich erfahrungsgemäß im Verhältnis etwa wie 3 zu 2

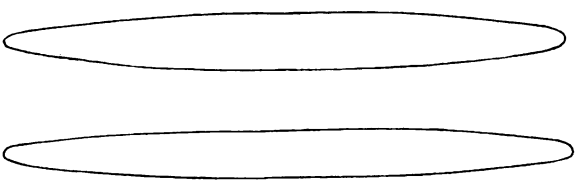


Fig. 61.

oder 4 zu 3, sagen wir wie 36 zu 25 oder 49 zu 36; nach dem dritten Paragraphen dieser Vorlesung ist aber das theoretische Verhältnis $(a + b)^2$ zu $(a - b)^2$. Setzt man daher

$$(a + b)^2/(a - b)^2 = 36/25,$$

bzw.

$$(a + b)^2/(a - b)^2 = 49/36,$$

so wird

$$b = \frac{1}{11} a, \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{1}{13} a.$$

Diese Werte bestimmen nun die Ellipsen, welche in Fig. 61 dargestellt wurden.

Nach dem angegebenen Paragraphen sind übrigens die Schwingungszahlen durch

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'}$$

zu berechnen; beachtet man jetzt, daß die Wellenlängen für das betrachtete Paar (I. Vorl. § 3)

$$5890{,}19 \cdot 10^{-8} \qquad \text{bzw.} \qquad 5896{,}16 \cdot 10^{-8}$$

sind, so ergibt sich sogleich

$$\frac{3 \cdot 10^{10}}{5890{,}19 \cdot 10^{-8}} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'},$$

$$\frac{3 \cdot 10^{10}}{5896{,}16 \cdot 10^{-8}} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'},$$

also:

$$2\frac{1}{\delta} = 3 \cdot 10^{18} \frac{11786{,}35}{5896{,}16 \times 5890{,}19},$$

$$2\frac{1}{\delta'} = 3 \cdot 10^{18} \frac{5{,}97}{5896{,}16 \times 5890{,}19},$$

und daher

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{5{,}97}{11786{,}35} = \frac{1}{1974}.$$

Es beschreibt also das elektrische Teilchen 1974 mal seine Bahn, bevor diese letzte eine ganze Drehung erlitten hat.

§ 11. Die Theorie von Stoney hat wohl etwas Verführerisches, aber dennoch müssen wir ausdrücklich bemerken, daß hierbei Störungen berechnet wurden, über die wir gar nichts wissen. Es muß dahingestellt bleiben, ob wirklich bei elektrischen Teilchensystemen derartige Wirkungen zum Vorschein kommen können. Wie wir aber sehen werden, treten in zusammengesetzten Gebilden störende Kräfte auf, welche mit den Stoneyschen eine gewisse Ähnlichkeit zeigen (man vergleiche hierzu die XX. Vorl.); es besitzt übrigens die Theorie einen eigenartigen Reiz, der sie mit Recht als beachtungswürdig erscheinen läßt.

Diese Theorie dürfen wir nämlich als eine kinematische Beschreibung des elektrostatischen Bildes betrachten; erst durch die bahnbrechenden Arbeiten von Larmor und J. J. Thomson hat nachher das Modell seine dynamische Begründung erhalten.

Achtzehnte Vorlesung.

J. J. Thomsons Modell der materiellen Atome.

§ 1—5. Allgemeine Schwingungsgleichungen für ein kompliziertes Teilchensystem. — § 6. Ein System mit zwei beweglichen Teilchen. — § 7. System mit drei Teilchen. — § 8. System mit vier Teilchen. — § 9. System mit fünf Teilchen.

§ 1. Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, wie das Spektrum, das ein schwingendes Teilchen emittiert, durch gewisse Störungen beeinflußt werden kann.

Um eine vollständige Theorie der Spektralanalyse aufzubauen, hätten wir jetzt, wie bemerkt, Modelle für die Atome der ponderablen Materie anzugeben und, wenn möglich, eine solche Struktur zu finden, nach welcher eben jene Störungen zustande kommen können.

Leider ist diese Aufgabe eine äußerst schwierige, und hat bis jetzt keine genügende Lösung gefunden; neuerdings führte aber J. J. Thomson eine recht interessante Untersuchung durch, welche hauptsächlich durch die Resultate, die sie für die Stabilität von Teilchensystemen lieferte, als ganz besonders beachtungswürdig erscheint.

Thomsons Modell der materiellen Atome bildet gewissermaßen eine Verallgemeinerung des Systems, welches in der sechzehnten Vorlesung studiert wurde (XVI. Vorl. § 5); denn er denkt sich eine Anzahl von negativen Teilchen, welche in einer Ebene liegen und die dabei von einer gleichmäßig positiv elektrisierten Kugel umhüllt werden.

Wir setzen, um das System zu berechnen, voraus, daß die Ebene der negativen Teilchen durch den Kugelmittelpunkt geht, und bezeichnen mit r_p den Abstand vom Zentrum, mit θ_p die Winkelkoordinate des p-ten Teilchens, mit $r_{p,s}$ endlich den Abstand zwischen dem p-ten und dem s-ten Teilchen.

Dann ist für das System der negativen Ladungen

$$U = \tfrac{1}{2}\sum \varphi\, q\,,$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum{}^{s} q_s \sum{}^{p}{}' \frac{q_p}{r_{s,p}}\,,$$

$$= \tfrac{1}{4}\sum{}^{s} q_s \sum{}^{p} \frac{q_p}{r_p \sin \tfrac{1}{2}(\theta_p - \theta_s)}\,,$$

also:

$$\frac{\partial U}{\partial r_p} = -\tfrac{1}{4}\sum\nolimits_s \frac{q_s q_p}{r_p^2 \sin\frac{1}{2}(\theta_p - \theta_s)} .$$

Die äußere Kraft, d. h. die Kraft, welche von der positiven Elektrizität herrührt, ist dabei (XVI. Vorl. § 5)

$$-\frac{q_p Q}{b^3} r_p ;$$

wir bekommen daher als Gleichgewichtsbedingung

$$\tfrac{1}{4}\sum\nolimits_s \frac{q_s}{\sin\frac{1}{2}(\theta_p - \theta_s)} = Q\frac{r^3_p}{b^3} .$$

Wir nehmen jetzt an, daß die negativen Teilchen auf einer Kreislinie regelmäßig verteilt liegen, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt, und setzen noch

$$r_p = a, \qquad q_p = q, \qquad Q = \nu q,$$

dann wird

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{S_o}{4\nu},$$

wo

$$S_o = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{n} + \operatorname{cosec}\frac{2\pi}{n} + \ldots + \operatorname{cosec}\frac{(n-1)\pi}{n},$$

und n die Zahl der negativen Teilchen bedeutet. Man findet leicht

$$S_o = 1, \qquad S_o = 2{,}3094, \qquad S_o = 3{,}8284, \qquad S_o = 5{,}5056,$$
$$S_o = 7{,}3094,$$

je nachdem $n = 1$ bzw. 2, 3, 4, 5 oder 6 ist.

Ist $\nu = n$, d. h. gleicht die positive Ladung der Kugel der Summe der Ladungen der negativen Teilchen, so erhält man

n	a/b
2	0,5
3	0,5773
4	0,6208
5	0,6505
6	0,6726.

Dreht sich nun der Teilchenring in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt herum mit einer Winkelgeschwindigkeit $\dot{\omega}$, so wird

$$T = \tfrac{1}{2}\sum\nolimits_p m_p r_p^2 \dot{\omega}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r_p} = m_p r_p \dot{\omega}^2,$$

und daher

$$m_p r_p \dot{\omega}^2 + \tfrac{1}{4} \sum_s \frac{q_s q_p}{r_p^2 \sin \frac{1}{2}(\theta_p - \theta_s)} = q_p Q \frac{r_p}{b^3} .$$

Behalten wir die oberen Bezeichnungen bei, und setzen noch

$$m_p = m ,$$

so wird endlich als Bewegungsgleichung

(*) $$m a \dot{\omega}^2 + \frac{q^2}{4 a^2} S_o = \frac{\nu q^2 a}{b^3} ,$$

oder

$$\frac{\nu a^3}{b^3} = \frac{m a^3}{q^2} \dot{\omega}^2 + \frac{S_o}{4} .$$

§ 2. Um einen komplizierteren Vorgang zu studieren, nehmen wir jetzt an, daß die negativen Teilchen aus ihren Gleichgewichtslagen ein wenig verschoben werden, so daß sie um diese in Schwingungen geraten.

Die gegenwärtige Lage von jedem Teilchen soll durch die Polarkoordinaten r_p und θ_p, und durch den senkrechten Abstand von der Ebene der ungestörten Bewegung, z_p, bestimmt werden. Wir setzen

$$r_p = a + \varrho_p , \qquad \theta_p - \theta_{p-1} = \frac{2\pi}{n} + \varphi_p - \varphi_{p-1} ,$$

und nehmen an, es seien die ϱ, φ und z sehr kleine Größen.

Man hat wie vorher

$$U = \tfrac{1}{2} \sum_s q_s \sum_p \frac{q_p}{r_{s,p}} ,$$

$$= \frac{q^2}{2} \sum_s \sum_p \frac{1}{r_{s,p}} ,$$

$$= \frac{q^2}{2} \sum_s \sum_p \frac{1}{[r_p^2 + r_s^2 - 2 r_p r_s \cos(\theta_s - \theta_p) + (z_p - z_s)^2]^{\frac{1}{2}}} ,$$

und dabei

$$T = \tfrac{1}{2} m \sum_p (\dot{r}_p^2 + r_p^2 \dot{\theta}_p^2 + \dot{z}_p^2) ;$$

um die Lagrangeschen Gleichungen der Bewegung bilden zu können, müssen wir also folgende Ausdrücke berechnen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_p} , \quad \frac{\partial T}{\partial r_p} , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_p} , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_p} , \quad \frac{\partial U}{\partial r_p} , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_p} \text{ u. } \frac{\partial U}{\partial z_p} .$$

Der Reihe nach findet man, durch leicht zu verstehende Umformungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot r_p} = m\ddot r_p, \qquad \frac{\partial T}{\partial r_p} = m r_p \dot\theta_p^2,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_p} = m r_p^2\ddot\theta_p + 2m r_p \dot r_p \dot\theta_p, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot z_p} = m\ddot z_p,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_p} = -q^2\sum_s \frac{a+\varrho_p-(a+\varrho_s)[\cos 2\psi-\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)]}{\{2a^2+2a(\varrho_p+\varrho_s)-2(a^2+a\varrho_p+a\varrho_s)[\cos 2\psi-\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)]\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$= -q^2\sum_s \frac{a(1-\cos 2\psi)+\varrho_p-\varrho_s\cos 2\psi+a\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)}{[2a^2(1-\cos 2\psi)+2a(\varrho_p+\varrho_s)-2a(\varrho_p+\varrho_s)\cos 2\psi+2a^2\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$= -q^2\sum_s \frac{1}{[2a^2(1-\cos 2\psi)]^{\frac{3}{2}}}[a(1-\cos 2\psi)+\varrho_p-\varrho_s\cos 2\psi+a\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)]$$
$$\cdot\left[1-\tfrac{3}{2}\frac{2a(\varrho_p+\varrho_s)-2a(\varrho_p+\varrho_s)\cos 2\psi+2a^2\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)}{2a^2(1-\cos 2\psi)}\right],$$

$$= -q^2\sum_s \frac{1}{8a^3\sin^3\psi}[2a\sin^2\psi+\varrho_p-\varrho_s\cos 2\psi+a\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)]$$
$$\cdot\left[1-\tfrac{3}{2}\frac{2a(\varrho_p+\varrho_s)\sin^2\psi+a^2\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)}{2a^2\sin^2\psi}\right],$$

$$= -q^2\sum_s \frac{1}{8a^3\sin^3\psi}[2a\sin^2\psi+\varrho_p-\varrho_s\cos 2\psi+a\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)$$
$$-3(\varrho_p+\varrho_s)\sin^2\psi-\tfrac{3}{2}a\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)],$$

$$= -q^2\sum_s \frac{1}{8a^3\sin^3\psi}[2a\sin^2\psi+\varrho_p(1-3\sin^2\psi)-\varrho_s(1+\sin^2\psi)$$
$$-\tfrac{1}{2}a\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)],$$

$$= -q^2\sum_s \frac{1}{4a^2\sin\psi}\left[1-\frac{\varrho_p}{a}\left(\tfrac{3}{2}-\frac{1}{2\sin^2\psi}\right)-\frac{\varrho_s}{a}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\sin^2\psi}\right)\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\psi.(\varphi_s-\varphi_p)\right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_p} = q^2\sum_s \frac{a^2\sin 2\psi+a(\varrho_p+\varrho_s)\sin 2\psi+a^2\cos 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)}{[2a^2(1-\cos 2\psi)+2a(\varrho_p+\varrho_s)-2a(\varrho_p+\varrho_s)\cos 2\psi+2a^2\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$= q^2\sum_s \frac{1}{[2a^2(1-\cos 2\psi)]^{\frac{3}{2}}}[a^2\sin 2\psi+a(\varrho_p+\varrho_s)\sin 2\psi+a^2\cos 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)]$$
$$\cdot\left[1-\tfrac{3}{2}\frac{2a(\varrho_p+\varrho_s)(1-\cos 2\psi)+2a^2\sin 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)}{2a^2(1-\cos 2\psi)}\right],$$

$$= q^2\sum_s \frac{1}{8a^3\sin^3\psi}[2a^2\sin\psi\cos\psi+2a(\varrho_p+\varrho_s)\sin\psi\cos\psi+a^2\cos 2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)$$
$$-3a(\varrho_p+\varrho_s)\sin\psi\cos\psi-3a^2\cos^2\psi.(\varphi_s-\varphi_p)],$$

$$= q^2\sum_s \frac{\cos\psi}{4a\sin^2\psi}\left[1-\tfrac{1}{2}\frac{\varrho_p}{a}-\tfrac{1}{2}\frac{\varrho_s}{a}-(\operatorname{cotg}\psi+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\psi)(\varphi_s-\varphi_p)\right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_p} = -q^2\sum_s \frac{z_p-z_s}{8a^3\sin^3\psi},$$

mit $\psi=(p-s)\frac{\pi}{n}$.

Der Kürze halber setzen wir

$$\frac{\partial U}{\partial r_p} = -\left(\frac{q^2}{4a^2}S_0 - \varrho_p A' - \sum_s \varrho_{p+s} A_s - a\sum_s \varphi_{p+s} B_s\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_p} = -\left(a\sum_s \varrho_{p+s} B_s - a^2 \varphi_p C + a^2 \sum_s \varphi_{p+s} C_s\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_p} = -\left(z_p D - \sum_s z_{p+s} D_s\right),$$

mit

$$S_0 = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}},$$

$$A' = \frac{q^2}{8a^3}\left[3\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}\right) - \left(\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3\frac{2\pi}{n}} + \ldots + \frac{1}{\sin^3\frac{(n-1)\pi}{n}}\right)\right],$$

$$A_s = \frac{q^2}{8a^3}\left(\frac{1}{\sin\frac{s\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3\frac{s\pi}{n}}\right),$$

$$B_s = \frac{q^2}{8a^3}\,\frac{\cos\frac{s\pi}{n}}{\sin^2\frac{s\pi}{n}},$$

$$C = \frac{q^2}{4a^3}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\left(\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots\right],$$

$$C_s = \frac{q^2}{4a^3}\,\frac{\cos\frac{s\pi}{n}}{\sin^2\frac{s\pi}{n}}\left(\operatorname{cotg}\frac{s\pi}{n} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{n}\right),$$

$$D = \frac{q^2}{8a^3}\left(\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3\frac{2\pi}{n}} + \ldots + \frac{1}{\sin^3\frac{(n-1)\pi}{n}}\right),$$

$$D_s = \frac{q^2}{8a^3}\,\frac{1}{\sin^3\frac{s\pi}{n}}.$$

Es bleibt noch übrig, die äußeren Kräfte zu bestimmen, d. h. die Kräfte, welche von den positiven Massen herrühren; diese sind aber, wie leicht zu sehen

$$\text{für die Koordinate } r_p \ldots\ldots - \frac{\nu q^2 r_p}{b^3},$$

$$\text{und für die Koordinate } z_p \ldots\ldots - \frac{\nu q^2 z_p}{b^3};$$

die Bewegungsgleichungen werden also zu

$$m(\ddot{r}_p - r_p\dot{\theta}_p^2) + \frac{\partial U}{\partial r_p} = -\frac{\nu q^2 r_p}{b^3}, \tag{1}$$

$$m(r_p^2\ddot{\theta}_p + 2 r_p\dot{r}_p\dot{\theta}_p) + \frac{\partial U}{\partial \theta_p} = 0, \tag{2}$$

$$m\ddot{z}_p + \frac{\partial U}{\partial z_p} = -\frac{\nu q^2 z_p}{b^3}. \tag{3}$$

§ 3. Diese Gleichungen haben wir jetzt zu entwickeln, wobei wir, wie es bereits in der vorigen Rechnung geschehen, die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen wollen. Es wird aus (1)

$$m[\ddot{\varrho}_p - (a+\varrho_p)(\dot{\omega}^2 + 2\omega\dot{\varphi}_p)] + \frac{\partial U}{\partial r_p} = -\frac{\nu q^2}{b^3}(a+\varrho_p),$$

d. h.

$$m\ddot{\varrho}_p - 2ma\omega\dot{\varphi}_p - ma\dot{\omega}^2 + \frac{\partial U}{\partial r_p} = -\frac{\nu q^2 a}{b^3} - \frac{\nu q^2\varrho_p}{b^3} + m\dot{\omega}^2\varrho_p,$$

oder, nach Gleichung (*)

$$m\ddot{\varrho}_p - 2ma\omega\dot{\varphi}_p + \frac{\partial U}{\partial r_p} = \varrho_p\left(m\dot{\omega}^2 - \frac{\nu q^2}{b^3}\right) - \frac{q^2}{4a^2}S_0. \tag{4}$$

Aus Gleichung (2) erhält man

$$m(r_p\ddot{\theta}_p + 2\dot{r}_p\dot{\theta}_p) + \frac{1}{r_p}\frac{\partial U}{\partial \theta_p} = 0,$$

und der Reihe nach

$$m(r_p\ddot{\theta}_p + 2\dot{r}_p\dot{\theta}_p) + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial \theta_p} = 0,$$

$$m[(a+\varrho_p)\ddot{\varphi}_p + 2\dot{\varrho}_p(\omega+\dot{\varphi}_p)] + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial \theta_p} = 0,$$

$$ma\ddot{\varphi}_p + m\varrho_p\ddot{\varphi}_p + 2m\omega\dot{\varrho}_p + 2m\dot{\varrho}_p\dot{\varphi}_p + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial \theta_p} = 0. \tag{5}$$

Aus (3) wird endlich

$$m\ddot{z}_p = -\frac{\nu q^2 z_p}{b^3} - \frac{\partial U}{\partial z_p}. \tag{6}$$

§ 4. Die Gleichungen (4), (5) und (6) könnte man nun nach der üblichen Methode integrieren, es empfiehlt sich aber, einem besonderem Rechnungsverfahren zu folgen, das von J. J. Thomson angegeben wurde.

Wir nehmen an es variieren ϱ, φ und z wie e^{int}, dann wird aus (4)

$$(A - m n^2)\varrho_p + A_1 \varrho_{p+1} + A_2 \varrho_{p+2} + \ldots - 2 m a \dot{\omega} i n \varphi_p + a B_1 \varphi_{p+1} + a B_2 \varphi_{p+2} + \ldots = 0,$$

oder, wenn man für p, der Reihe nach, $1 \cdot 2 \ldots n$ einsetzt,

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} (A - m n^2)\varrho_1 + A_1 \varrho_2 + A_2 \varrho_3 + \ldots + A_{n-1}\varrho_n \\ \qquad - 2 m a \dot{\omega} i n \varphi_1 + a B_1 \varphi_2 + a B_2 \varphi_3 + \ldots = 0, \\ (A - m n^2)\varrho_2 + A_1 \varrho_3 + A_2 \varrho_4 + \ldots \\ \qquad - 2 m a \dot{\omega} i n \varphi_2 + a B_1 \varphi_3 + a B_2 \varphi_4 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (A - m n^2)\varrho_n + A_1 \varrho_1 + A_2 \varrho_2 + \ldots \\ \qquad - 2 m a \dot{\omega} i n \varphi_n + a B_1 \varphi_1 + a B_2 \varphi_2 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Auf ähnliche Weise erhält man aus (5)

$$2 m \dot{\omega} i n \frac{\varrho_p}{a} - B_1 \frac{\varrho_{p+1}}{a} - B_2 \frac{\varrho_{p+2}}{a} + \ldots + (C - m n^2)\varphi_p - C_1 \varphi_{p+1} - C_2 \varphi_{p+2} - \ldots = 0,$$

und hiernach

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} 2 m \dot{\omega} i n \frac{\varrho_1}{a} - B_1 \frac{\varrho_2}{a} - B_2 \frac{\varrho_3}{a} - \ldots \\ \qquad + (C - m n^2)\varphi_1 - C_1 \varphi_2 - C_2 \varphi_3 - \ldots = 0, \\ 2 m \dot{\omega} i n \frac{\varrho_2}{a} - B_1 \frac{\varrho_3}{a} - B_2 \frac{\varrho_4}{a} - \ldots \\ \qquad + (C - m n^2)\varphi_2 - C_1 \varphi_3 - C_2 \varphi_4 - \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2 m \dot{\omega} i n \frac{\varrho_n}{a} - B_1 \frac{\varrho_1}{a} - B_2 \frac{\varrho_2}{a} - \ldots \\ \qquad + (C - m n^2)\varphi_n - C_1 \varphi_1 - C_2 \varphi_2 - \ldots = 0. \end{cases}$$

Ist nun w eine Wurzel der Gleichung $x^n = 1$, d. h. ist w eine von den n-ten Wurzeln der Einheit, so genügt man offenbar den Gleichungen (A) indem man

$$\varrho_2 = w\varrho_1, \qquad \varrho_3 = w\varrho_2, \qquad \varrho_4 = w\varrho_3, \ldots$$
$$\varphi_2 = w\varphi_1, \qquad \varphi_3 = w\varphi_2, \qquad \varphi_4 = w\varphi_3, \ldots$$

setzt, wenn nur

$$(7)\quad \begin{aligned}&\varrho_1(A - m\mathfrak{n}^2 + wA_1 + w^2A_2 + \ldots + w^{n-1}A_{n-1})\\ &+\varphi_1 a(-2m\dot{\omega}\mathfrak{n}i + wB_1 + w^2B_2 + \ldots + w^{n-1}B_{n-1}) = 0\end{aligned}$$

ist.

Durch dieselben Werte wird auch den Gleichungen (B) Genüge geleistet, wenn

$$(8)\quad \begin{aligned}&\varrho_1(2m\dot{\omega}\mathfrak{n}i - wB_1 - w^2B_2 - \ldots - w^{n-1}B_{n-1})\\ &+\varphi_1 a(C - m\mathfrak{n}^2 - wC_1 - w^2C_2 - \ldots - w^{n-1}C_{n-1}) = 0.\end{aligned}$$

Hieraus folgt nun, durch Elimination von ϱ_1 und φ_1

$$\begin{vmatrix} A - m\mathfrak{n}^2 + wA_1 + \ldots & -2m\dot{\omega}\mathfrak{n}i + wB_1 + \ldots \\ 2m\dot{\omega}\mathfrak{n}i - wB_1 - \ldots & C - m\mathfrak{n}^2 - wC_1 - \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

also:

$$(9)\quad \begin{aligned}&(A - m\mathfrak{n}^2 + wA_1 + \ldots)(C - m\mathfrak{n}^2 - wC_1 - \ldots)\\ &= -(-2m\dot{\omega}\mathfrak{n}i + wB_1 + \ldots)^2,\end{aligned}$$

welche Gleichung zur Bestimmung von $\mathfrak{n}$, d. h. der Eigenperioden des Systems, dienen kann.

Es ist nun

$$w = \cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n},$$

wo h eine ganze Zahl, zwischen 0 und $n-1$ bedeutet.

Nach Einsetzung dieses Wertes wird aber

$$\begin{aligned}wC_1 + w^2C_2 + \ldots = \frac{q^2}{4a^3}\Bigg[&\cos\frac{2h\pi}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)\\ &+\cos\frac{4h\pi}{n}\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin^2\frac{2\pi}{n}}\left(\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}\right)\\ &+\ldots\Bigg],\\ = N_h;&\end{aligned}$$

$$w A_1 + w^2 A_2 + \ldots = \frac{q^2}{8a^3}\left[\cos\frac{2h\pi}{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{n}}\right)\right.$$

$$+ \cos\frac{4h\pi}{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\sin^3\frac{2\pi}{n}}\right)$$

$$\left. + \ldots\right],$$

$$= L_h;$$

$$w B_1 + w^2 B_2 + \ldots = \frac{i q^2}{8a^3}\left(\sin\frac{2h\pi}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}} + \sin\frac{4h\pi}{n}\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin^2\frac{2\pi}{n}} + \ldots\right),$$

$$= i M_h;$$

wodurch Gleichung (9) sich zu

$$(A - m\mathfrak{n}^2 + L_h)(C - m\mathfrak{n}^2 - N_h) = (M_h - 2m\dot{\omega}\mathfrak{n})^2$$

umformt, oder, wie leicht zu ersehen, zu

$$(10)\quad \left(\frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3}S_0 + L_h - L_0 - m\mathfrak{n}^2\right)(N_0 - N_h - m\mathfrak{n}^2) = (M_h - 2m\dot{\omega}\mathfrak{n})^2.$$

Dem h hat man nun in dieser Gleichung die Werte von 0 bis $n-1$ zu erteilen; man sieht aber gleich, daß, wenn $n-h$ für h geschrieben wird, die für $\mathfrak{n}$ sich ergebenden Werte nur durch das Vorzeichen zu unterscheiden sind. Wir dürfen also ganz einfach für h die Werte von 0 bis $(n-1)/2$, wenn n eine ungerade Zahl, und die Werte von 0 bis $n/2$ wenn n eine gerade Zahl ist, einsetzen.

Ist n eine ungerade Zahl, so hat man also $(n+1)/2$ Gleichungen (10) aufzulösen; für $h=0$ ist aber $M_h = 0$, womit die Gleichung zu einer quadratischen wird. Man hat daher im ganzen

$$4\frac{n+1}{2} - 2 = 2n$$

Wurzeln.

Ist n aber eine gerade Zahl, so hat man $n/2+1$ Gleichungen (10) zu betrachten; für $h=0$ und $h=n/2$ werden

die Gleichungen zu quadratischen. Somit reduzieren sich wieder die Wurzeln auf

$$4\left(\frac{n}{2}+1\right)-4=2n;$$

was eben den Freiheitsgraden, die wir berücksichtigt haben, entspricht.

Es bleibt uns Gleichung (6) zu integrieren. Nach dem vorigen Verfahren wird aber

$$z_p\left(\frac{\nu q^2}{b^3}-D-m\mathfrak{n}^2\right)+\sum_s z_{p+s}D_s=0,$$

also:

$$\text{(C)}\quad\begin{cases} z_1\left(\frac{\nu q^2}{b^3}-D-m\mathfrak{n}^2\right)+z_2D_1+z_3D_2+\ldots=0,\\ z_2\left(\frac{\nu q^2}{b^3}-D-m\mathfrak{n}^2\right)+z_3D_1+z_4D_2+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_n\left(\frac{\nu q^2}{b^3}-D-m\mathfrak{n}^2\right)+z_1D_1+z_2D_2+\ldots=0. \end{cases}$$

Wir setzen wieder

$$z_2=wz_1,\qquad z_3=wz_2,\qquad z_4=wz_3,\ldots$$

und erhalten als Bedingungsgleichung

$$\text{(11)}\quad \frac{\nu q^2}{b^3}-D-m\mathfrak{n}^2+wD_1+w^2D_2+\ldots+w^{n-1}D_{n-1}=0;$$

oder, nach der Definition

$$wD_1+w^2D_2+\ldots+w^{n-1}D_{n-1}=\frac{q^2}{8a^3}\left(\frac{\cos\frac{2h\pi}{n}}{\sin^3\frac{\pi}{n}}+\frac{\cos\frac{4h\pi}{n}}{\sin^3\frac{2h\pi}{n}}+\ldots\right),$$

$$=P_h,$$

$$\frac{\nu q^2}{b^3}+P_h-D-m\mathfrak{n}^2=0,$$

d. h.

$$\text{(12)}\quad \frac{\nu q^2}{b^3}+P_h-P_0-m\mathfrak{n}^2=0.$$

Diese Gleichung liefert nun, für $h=0,\ 1,\ldots n-1,\ n$ verschiedene Werte von $\mathfrak{n}$, welche eben den Freiheitsgraden

des Systems für Verrückungen entsprechen, welche senkrecht zur Ebene der ungestörten Bewegung liegen.

§ 5. Gleichungen (10) und (12) hängen nur von den vier Funktionen L_h, M_h, N_h und P_h ab; diese können aber durch drei Größen ausgedrückt werden. Setzt man nämlich

$$S_h = \sum_1^{n-1} s \cos \frac{2\,h\,s\,\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{s\,\pi}{n}},$$

$$T_h = \sum_1^{n-1} s \cos \frac{2\,h\,s\,\pi}{n} \frac{1}{\sin^3 \frac{s\,\pi}{n}},$$

$$U_h = \sum_1^{n-1} s \sin \frac{2\,h\,s\,\pi}{n} \frac{\cos \frac{s\,\pi}{n}}{\sin^2 \frac{s\,\pi}{n}},$$

so wird

$$L_h = (S_h + T_h) \frac{q^2}{8\,a^3}, \qquad N_h = (2\,T_h - S_h) \frac{q^2}{8\,a^3},$$

$$M_h = U_h \frac{q^2}{8\,a^3}, \qquad P_h = T_h \frac{q^2}{8\,a^3}.$$

§ 6. Wir gehen jetzt zur Berechnung von einfachen Systemen. Für $n = 2$ erhält man

$$L_0 = 2\,q^2/8\,a^3, \quad M_0 = 0, \quad N_0 = q^2/8\,a^3, \quad P_0 = q^2/8\,a^3,$$
$$L_1 = -\,2\,q^2/8\,a^3, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = -\,q^2/8\,a^3, \quad P_1 = -\,q^2/8\,a^3.$$

Damit folgt aber aus Gleichung (10) für $h = 0$

$$\left(\frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3} - m\,\mathfrak{n}^2\right)(-\,m\,\mathfrak{n}^2) = 4\,m^2\,\dot{\omega}^2\,\mathfrak{n}^2,$$

also:

$$\mathfrak{n} = 0, \qquad \mathfrak{n} = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{q^2}{m\,a^3} + 4\,\dot{\omega}^2} = \sqrt{\frac{3\,\nu\,q^2}{m\,b^3} + \dot{\omega}^2};$$

und für $h = 1$

$$\left(\frac{1}{4}\frac{q^2}{a^3} - m\,\mathfrak{n}^2\right)^2 = 4\,m^2\,\dot{\omega}^2\,\mathfrak{n}^2,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \pm\,\dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{q^2}{m\,a^3} + \dot{\omega}^2} = \pm\,\dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{\nu\,q^2}{m\,b^3}}.$$

Aus Gleichung (12) wird endlich für $h = 0$

$$\frac{\nu\,q^2}{b^3} - m\,\mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3}},$$

und für $h = 1$

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{q^2}{4 a^3} - m \mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3} - \frac{q^2}{4 m a^3}} = \dot{\omega}.$$

Die sechs Werte von $\mathfrak{n}$, welche den sechs Freiheitsgraden entsprechen, die ein System von zwei Teilchen besitzt werden hierbei zu

$$0,\ \dot{\omega},\ \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3}},\quad \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3}} - \dot{\omega},\quad \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3}} + \dot{\omega},\quad \sqrt{\frac{3 \nu q^2}{m b^3} + \dot{\omega}^2}.$$

Dreht sich die Kreislinie nicht um ihre Achse, ist also $\dot{\omega} = 0$, so werden zwei Wurzeln zu Null, drei zu $\sqrt{\nu q^2/m b^3}$, und die sechste zu $\sqrt{3 \nu q^2/m b^3}$.

§ 7. Enthält das System drei Teilchen, so kann man für die charakteristischen Funktionen folgende Werte berechnen

$$S_0 = \frac{4}{\sqrt{3}},\quad T_0 = \frac{16}{3\sqrt{3}},\quad U_0 = 0,\quad L_0 = \frac{28}{3\sqrt{3}} \frac{q^2}{8 a^3},$$

$$N_0 = \frac{20}{3\sqrt{3}} \frac{q^2}{8 a^3},\quad M_0 = 0,\quad P_0 = \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{q^2}{8 a^3},$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}},\quad T_1 = -\frac{8}{3\sqrt{3}},\quad U_1 = \frac{2}{\sqrt{3}},\quad L_1 = -\frac{14}{3\sqrt{3}} \frac{q^2}{8 a^3},$$

$$N_1 = -\frac{10}{3\sqrt{3}} \frac{q^2}{8 a^3},\quad M_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{q^2}{8 a^3},\quad P_1 = -\frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{q^2}{8 a^3},$$

$$S_2 = S_1,\quad T_2 = T_1,\quad U_2 = -U_1,\quad L_2 = L_1,$$

$$N_2 = N_1,\quad M_2 = -M_1,\quad P_2 = P_1.$$

Hiernach erhalten wir aus (10) für $h = 0$

$$\left(\sqrt{3} \frac{q^2}{a^3} - m \mathfrak{n}^2\right)(-m \mathfrak{n}^2) = 4 m^2 \dot{\omega}^2 \mathfrak{n}^2,$$

also:

$$\mathfrak{n} = 0,\qquad \mathfrak{n} = \sqrt{\sqrt{3} \frac{q^2}{m a^3} + 4 \dot{\omega}^2} = \sqrt{\frac{3 \nu q^2}{m b^3} + \dot{\omega}^2};$$

für $h = 1$

$$\left(\frac{5}{4\sqrt{3}} \frac{q^2}{a^3} - m \mathfrak{n}^2\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{q^2}{8 a^3} - 2 m \dot{\omega} \mathfrak{n}\right)^2,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{q^2}{m a^3} + \dot{\omega}^2} = \dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3}},$$

$$\mathfrak{n} = -\dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q^2}{m a^3} + \dot{\omega}^2} = -\dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\nu q^2}{m b^3} - \frac{1}{2} \dot{\omega}^2};$$

für $h = 2$ treten wieder dieselben Werte des $\mathfrak{n}$ wie für $h = 1$ auf.

Aus (12) wird übrigens für $h = 0$

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - m \mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3}},$$

und für $h = 1$

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{q^2}{\sqrt{3} a^3} - m \mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \pm \dot{\omega}.$$

Für $h = 2$ erhalten wir wieder dieselben Wurzeln wie für $h = 1$.

§ 8. Die Rechnungen werden natürlich verwickelter, wenn die Zahl der Teilchen im Systeme zunimmt; für $n = 4$ und $n = 5$ stoßen wir aber gegen keine prinzipielle Schwierigkeit. So erhält man für ein System von vier Teilchen

$$S_0 = 2\sqrt{2}+1, \quad T_0 = 4\sqrt{2}+1, \quad U_0 = 0, \quad L_0 = (6\sqrt{2}+2)\frac{q^2}{8a^3},$$

$$N_0 = (6\sqrt{2}+1)\frac{q^2}{8a^3}, \quad M_0 = 0, \quad P_0 = (4\sqrt{2}+1)\frac{q^2}{8a^3},$$

$$S_1 = -1, \quad T_1 = -1, \quad U_1 = 2\sqrt{2}, \quad L_1 = -2\frac{q^2}{8a^3},$$

$$N_1 = -\frac{q^2}{8a^3}, \quad M_1 = 2\sqrt{2}\frac{q^2}{8a^3}, \quad P_1 = -\frac{q^2}{8a^3},$$

$$S_2 = -2\sqrt{2}+1, \quad T_2 = -4\sqrt{2}+1, \quad U_2 = 0, \quad L_2 = (-6\sqrt{2}+2)\frac{q^2}{8a^3},$$

$$N_2 = (-6\sqrt{2}+1)\frac{q^2}{8a^3}, \quad M_2 = 0, \quad P_2 = (-4\sqrt{2}+1)\frac{q^2}{8a^3};$$

und hiernach, aus (10), für $h = 0$

$$\left[\frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3}(1+2\sqrt{2}) - m\mathfrak{n}^2\right](-m\mathfrak{n}^2) = 4m^2\dot{\omega}^2\mathfrak{n}^2,$$

also:

$$\mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{n} = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{q^2}{m a^3}(1+2\sqrt{2}) + 4\dot{\omega}^2} = \sqrt{\frac{3\nu q^2}{m b^3} + \dot{\omega}^2};$$

für $h = 1$ wird übrigens

$$\left[(6\sqrt{2}+2)\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2\right]^2 = \left(2\sqrt{2}\,\frac{q^2}{8a^3} - 2m\dot{\omega}\mathfrak{n}\right)^2,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\frac{q^2}{ma^3} + \dot{\omega}^2} = \dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{\nu q^2}{mb^3}},$$

$$\mathfrak{n} = -\dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{4\sqrt{2}+1}{4}\frac{q^2}{ma^3} + \dot{\omega}^2} = -\dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{4\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1}\frac{\nu q^2}{mb^3} - \frac{2\sqrt{2}\,\dot{\omega}^2}{2\sqrt{2}+1}},$$

und für $h = 2$

$$\left(\frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3} - m\mathfrak{n}^2\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{q^2}{a^3} - m\mathfrak{n}^2\right) = 4m^2\dot{\omega}^2\mathfrak{n}^2.$$

Betrachtet man diese letzte als eine Gleichung für $\mathfrak{n}^2$, so sieht man gleich, daß sie lauter positive Wurzeln haben kann; für $\mathfrak{n}$ müssen also hieraus reelle Werte sich ableiten lassen.

In der Tat findet man

$$\mathfrak{n}^2 = \frac{3}{8\sqrt{2}}(4+\sqrt{2})\frac{q^2}{ma^3} + 2\dot{\omega}^2 \pm \sqrt{\frac{9(4-\sqrt{2})^2}{128}\frac{q^4}{m^2a^6} + \frac{3(\sqrt{2}+4)}{2\sqrt{2}}\frac{q^2}{ma^3}\dot{\omega}^2 + 4\dot{\omega}^4}.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir aus (12) für $h = 0$

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - m\mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{\nu q^2}{mb^3}},$$

für $h = 1$

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - (4\sqrt{2}+2)\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \pm\dot{\omega}.$$

Für $h = 2$ wird endlich

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - 8\sqrt{2}\,\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n}^2 = \frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+2}\dot{\omega}^2 - \frac{4\sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}+2}\frac{\nu q^2}{mb^3};$$

wird hierbei der Bedingung

$$\dot{\omega}^2 > \frac{4\sqrt{2}-2}{8\sqrt{2}}\frac{\nu q^2}{m b^3} > 0{,}325\,\frac{\nu q^2}{m b^3}$$

nicht genügt, so kann das Gleichgewicht kein stabiles sein; dann ordnen sich die Teilchen von selbst als Ecken eines regelmäßigen Tetraeders an.

§ 9. Enthält das betrachtete System statt vier fünf negative Teilchen, so erhalten wir nach dem üblichen Verfahren

$$S_0 = 5{,}5056, \quad T_0 = 12{,}1732, \quad U_0 = 0, \quad L_0 = 17{,}6788\,\frac{q^2}{8a^3},$$

$$N_0 = 18{,}8408\,\frac{q^2}{8a^3}, \quad M_0 = 0, \quad P_0 = 12{,}1732\,\frac{q^2}{8a^3},$$

$$S_1 = -0{,}6500, \quad T_1 = 1{,}1608, \quad U_1 = 4{,}8560, \quad L_1 = 0{,}5108\,\frac{q^2}{8a^3},$$

$$N_1 = 2{,}9716\,\frac{q^2}{8a^3}, \quad M_1 = 4{,}8560\,\frac{q^2}{8a^3}, \quad P_1 = 1{,}1608\,\frac{q^2}{8a^3},$$

$$S_2 = -2{,}1030, \quad T_2 = -7{,}2490, \quad U_2 = 2{,}1030, \quad L_2 = -9{,}3520\,\frac{q^2}{8a^3},$$

$$N_2 = -12{,}3950\,\frac{q^2}{8a^3}, \quad M_2 = 2{,}1030\,\frac{q^2}{8a^3}, \quad P_2 = -7{,}2490\,\frac{q^2}{8a^3}.$$

Mit diesen Werten sind nun die Schwingungsgleichungen leicht zu bilden.

Es wird aus (10), für $h = 0$

$$\left(\frac{3}{4}\,5{,}5056\,\frac{q^2}{a^3} - m\mathfrak{n}^2\right)(-m\mathfrak{n}^2) = 4m^2\dot{\omega}^2\mathfrak{n}^2,$$

also:

$$\mathfrak{n} = 0, \qquad \mathfrak{n} = \sqrt{\frac{3\nu q^2}{m b^3} + \dot{\omega}^2},$$

für $h = 1$

$$\left(15{,}8692\,\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2\right)^2 = \left(4{,}8560\,\frac{q^2}{8a^3} - 2m\dot{\omega}\mathfrak{n}\right)^2,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \dot{\omega} \pm \sqrt{11{,}0132\,\frac{q^2}{8ma^3} + \dot{\omega}^2} = \dot{\omega} \pm \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3}},$$

$$\mathfrak{n} = -\dot{\omega} \pm \sqrt{20{,}7252\,\frac{q^2}{8ma^3} + \dot{\omega}^2},$$

und für $h = 2$

$$\left(6\,\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2\right)\left(31{,}24\,\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2\right) = \left(2{,}10\,\frac{q^2}{8a^3} - 2m\dot{\omega}\mathfrak{n}\right)^2.$$

Von dieser Gleichung kann man wiederum beweisen, daß sie lauter reelle Wurzeln hat.

Es bleibt uns, die Bewegungen senkrecht zur Ebene der ungestörten Bewegung zu betrachten. Wir leiten aus (12) für $h = 0$

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - m\,\mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{\nu q^2}{m b^3}}$$

ab.

Für $h = 1$ wird dann

$$m\,\dot{\omega}^2 - m\,\mathfrak{n}^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{n} = \dot{\omega},$$

und für $h = 2$

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - 19{,}42\,\frac{q^2}{8\,a^3} - m\,\mathfrak{n}^2 = 0,$$

d. h.

$$\frac{19{,}42}{11}\,m\,\dot{\omega}^2 + \frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{19{,}42}{11}\,\frac{\nu q^2}{b^3} - m\,\mathfrak{n}^2 = 0,$$

oder noch

$$\frac{19{,}42}{11}\,m\,\dot{\omega}^2 - \frac{8{,}42}{11}\,\frac{\nu q^2}{b^3} - m\,\mathfrak{n}^2 = 0.$$

Hiernach ist das Gebilde ein stabiles, wenn nur

$$\dot{\omega}^2 > \frac{8{,}42}{19{,}42}\,\frac{\nu q^2}{m b^3} > 0{,}433\,\frac{\nu q^2}{m b^3}.$$

Das Resultat unserer Untersuchung dürfen wir demnach so aussprechen, daß wir sagen: Während ein System von zwei oder drei Teilchen immer bestehen kann, erfordert ein System von vier oder fünf Teilchen dazu eine ganz bestimmte Drehungsgeschwindigkeit. Fällt nämlich jene Geschwindigkeit unter eine gewisse Grenze, so geht das System sofort in Trümmer.

Neunzehnte Vorlesung.

Stabilitätsfragen. — Das periodische System der Elemente.

§ 1. Ein System mit sechs Teilchen; Wiederherstellung der Stabilität. — § 2—3. Komplizierte Systeme. — § 4—5. Das periodische System der Elemente.

§ 1. Wie wir gesehen haben, kann ein System von vier oder fünf negativen Teilchen doch ein stabiles sein, wenn nur

die Drehungsgeschwindigkeit genügend groß ist. Wird dagegen die Teilchenzahl sechs, so kann das System keinesfalls seine Struktur behalten.

Die Rechnung ist hier ganz wie vorher auszuführen; wir finden

$$S_0 = 5 + \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad L_0 = \left(22 + \frac{28}{3\sqrt{3}}\right)\frac{q^2}{8a^3},$$

$$N_0 = \left(29 + \frac{20}{3\sqrt{3}}\right)\frac{q^2}{8a^3},$$

$$L_3 = \left(-22 + \frac{28}{3\sqrt{3}}\right)\frac{q^2}{8a^3}, \qquad M_3 = 0,$$

$$N_3 = \left(-29 + \frac{20}{3\sqrt{3}}\right)\frac{q^2}{a^3},$$

und daher, aus Gleichung (10) (XVIII. Vorl. § 4), für $h = 3$

$$\left[6\left(5 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\frac{q^2}{8a^3} - 44\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2\right]\left(58\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2\right) = 4m^2\dot{\omega}^2\mathfrak{n}^2,$$

d. h.

$$\left(-\frac{14 - 8\sqrt{3}}{8}\frac{q^2}{a^3} - m\mathfrak{n}^2\right)\left(58\frac{q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2\right) = 4m^2\dot{\omega}^2\mathfrak{n}^2.$$

Es ist nun zu bemerken, daß $14 - 8\sqrt{3}$ eine positive Größe ist; die Gleichung liefert also für $\mathfrak{n}^2$ eine negative Wurzel, uud für $\mathfrak{n}$ imaginäre Werte.

Demnach kann, wie gesagt, das System nicht mehr ein stabiles sein. Wir können aber die Stabilität wieder erhalten wenn wir etwa ν' negative Teilchen im Mittelpunkte der positiven Kugel uns angebracht denken. Denn dadurch wird eine äußere Kraft hervorgerufen, welche auf jede Koordinate r_p wirkt, und die Größe

$$\frac{\nu' q^2}{r_p^2} = \frac{\nu' q^2}{(a+\varrho_p)^2} = \frac{\nu' q^2}{a^2 + 2a\varrho_p} = \frac{\nu' q^2}{a^2}\left(1 - \frac{2\varrho_p}{a}\right) = \frac{\nu' q^2}{a^2} - \frac{2\nu' q^2 \varrho_p}{a^3}$$

hat. Bei Einführung dieser neuen Kraft wird die Schwingungsgleichung (10) (XVIII. Vorl. § 4) zu

$$\left(\frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3}S_0 + \frac{3\nu' q^2}{a^3} + L_h - L_0 - m\mathfrak{n}^2\right)(N_0 - N_h - m\mathfrak{n}^2) = (M_h - 2m\dot{\omega}\mathfrak{n})^2,$$

woraus in unserem Falle, für $\nu' = 1$ und $h = 3$

$$\left(\frac{10 + 8\sqrt{3}}{8}\frac{q^2}{a^3} - m\mathfrak{n}^2\right)\left(\frac{58\,q^2}{8a^3} - m\mathfrak{n}^2\right) = 4m^2\dot{\omega}^2\mathfrak{n}^2$$

sich ableiten läßt. Offenbar sind die jetzt für $\mathfrak{n}^2$ sich ergebenden Wurzeln positiv, $\mathfrak{n}$ ist daher eine reelle Größe und das betrachtete System ein stabiles.

Gleichung (12) der vorigen Vorlesung (§ 4) wird jetzt, für $h = 3$ zu

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{\nu' q^2}{a^3} - \frac{34 q^2}{8 a^3} - m\mathfrak{n}^2 = 0,$$

für $\nu' = 1$ erhalten wir also, als Stabilitätsbedingung

$$(*) \qquad \frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{q^2}{a^3} - \frac{34 q^2}{8 a^3} > 0.$$

Es ist aber (nach der achtzehnten Vorlesung, § 1, bei Einsetzung der neuen äußeren Kraft)

$$\frac{\nu q^2}{b^3} = m\dot{\omega}^2 + \frac{q^2}{a^3} + \frac{q^2}{4 a^3} S_0,$$

$$= m\dot{\omega}^2 + \frac{q^2}{a^3} + \frac{q^2}{4 a^3}\left(5 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right),$$

also:

$$(**) \qquad \frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{q^2}{a^3} = m\dot{\omega}^2 + \frac{q^2}{4 a^3}\left(5 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right),$$

und

$$\frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{q^2}{a^3} - \frac{34 q^2}{8 a^3} = m\dot{\omega}^2 + \frac{q^2}{4 a^3}\left(5 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) - \frac{17 q^2}{4 a^3},$$

$$= m\dot{\omega}^2 - \frac{q^2}{4 a^3}\left(12 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Bedingung (*) darf man also unter die Form

$$m\dot{\omega}^2 - \frac{q^2}{4 a^3}\left(12 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) > 0,$$

d. h.

$$(***) \qquad m\dot{\omega}^2 > \frac{q^2}{4 a^3}\left(12 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

setzen. Aus (**) wird aber

$$\frac{\nu q^2}{b^3} = m\dot{\omega}^2 + \frac{q^2}{4 a^3}\left(9 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right),$$

also:

$$\frac{q^2}{4 a^3} = \frac{1}{9 + \frac{4}{\sqrt{3}}}\left(\frac{\nu q^2}{b^3} - m\dot{\omega}^2\right),$$

womit (***) die Form annimmt

$$m\dot{\omega}^2 > \frac{12 - \frac{4}{\sqrt{3}}}{21} \frac{\nu q^2}{b^3},$$

$$> 0{,}46 \frac{\nu q^2}{b^3}.$$

Wird jetzt das negative Teilchen, das im Mittelpunkte liegt, aus seiner Ruhelage, der Ebene der ungestörten Bewegung senkrecht verschoben, so erhält man, wie leicht zu ersehen, die Gleichung

$$m\ddot{z} = -\left(\frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{6q^2}{a^3}\right) z,$$

woraus

$$m\mathfrak{n}^2 = \frac{\nu q^2}{b^3} - \frac{6q^2}{a^3}$$

sich ableiten läßt. $\mathfrak{n}$ ist hiernach eine reelle Größe, wenn

$$\frac{\nu q^2}{b^3} > \frac{6q^2}{a^3},$$

d. h.

$$\frac{\nu q^2}{b^3} > \frac{24}{9 + \frac{4}{\sqrt{3}}}\left(\frac{\nu q^2}{b^3} - m\dot{\omega}^2\right),$$

oder noch

$$m\dot{\omega}^2 > \frac{15 - \frac{4}{\sqrt{3}}}{24}\frac{\nu q^2}{b^3},$$

$$> 0{,}53\,\frac{\nu q^2}{b^3}$$

ist; die Grenze, die hieraus für $\dot{\omega}^2$ folgt, ist größer als die eben gefundene.

§ 2. Wir gehen jetzt zur Untersuchung von Ringen, welche mehr als sechs negative Teilchen enthalten. Es wird sich zeigen, daß ein negativ elektrischer Punkt, im Zentrum der Kugel, genügt, um die Stabilität zu sichern, wenn der Ring 7 oder 8 Teilchen enthält.

Nach dem vorigen Paragraphen gilt ja die Schwingungsgleichung

$$\left(\frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3}S_0 + \frac{3\nu' q^2}{a^3} + L_h - L_0 - m\mathfrak{n}^2\right)\left(N_0 - N_h - m\mathfrak{n}^2\right) = \left(M_h - 2m\dot{\omega}\mathfrak{n}\right)^2;$$

nun ist $N_0 - N_h$ eine durchaus positive Größe, und M_h eine kleine gegen L und N. Die Gleichung wird also reelle Wurzeln haben, wenn

$$\frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3}S_0 + \frac{3\nu' q^2}{a^3} - (L_0 - L_h) > 0$$

ist. Den größten Wert für $L_0 - L_h$ erhält man nun, wenn man $h = \frac{n}{2}$ bzw. $h = \frac{n-1}{2}$, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, setzt.

Die Stabilitätsbedingung darf man also, je nach dem Fall, in der Form

$$\frac{3\nu' q^2}{a^3} > L_0 - L_{\frac{n}{2}} - \frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3} S_0,$$

bzw.

$$\frac{3\nu' q^2}{a^3} > L_0 - L_{\frac{n-1}{2}} - \frac{3}{4}\frac{q^2}{a^3} S_0$$

schreiben.

Aus diesen Gleichungen können wir den kleinsten Wert des ν', der das System zu einem stabilen macht, ohne Schwierigkeit berechnen.

Man erhält folgende Tabelle

n	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40
ν'	0	1	1	1	2	3	15	39	101	232.

Wenn ν' größer als Eins ist, können die inneren Teilchen offenbar nicht im Mittelpunkt zusammenliegen; sie werden sich gegenseitig abstoßen, und zwar so weit, bis die mutuelle Abstoßung durch die Anziehung der positiven Elektrizität ausbalanciert werden kann. Sind im Innern zwei Teilchen vorhanden, wie es für $n = 9$ der Fall ist, so werden sie einen Doppelpunkt bilden müssen, dessen Achse der Ebene der ungestörten Bewegung parallel liegt.

Für $n = 10$ bilden die drei inneren Teilchen die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Ebene zu der Ringebene parallel ist.

Für $n = 12$ ist $\nu' = 7$; sieben Teilchen können aber, wie bemerkt, keinen stabilen Ring bilden, es wird also ein Teilchen im Mittelpunkt isoliert bleiben. Anders gesagt, es besteht ein System von 19 Teilchen aus zwei Ringen, welche 12 bzw. 6 Teilchen enthalten, und einem isolierten mittleren Punkt. Ist also die Zahl der negativen Teilchen im System eine sehr große, so werden sie sich in konzentrischen Ringen anordnen, welche, je näher sie dem Mittelpunkte der positiven Kugel liegen, eine desto kleinere Anzahl von Teilchen enthalten.

Dabei sind die Ebenen der einzelnen Ringe annäherungsweise einander parallel, und zur gemeinsamen Drehungsachse senkrecht. Die Drehungsgeschwindigkeit kann bis Null sinken, wenn die Verbindungen des Systems derart sind, daß sie keine normale Verrückung zulassen.

§ 3. Bis jetzt haben wir immer vorausgesetzt, daß die negativen Teilchen einer bestimmten Ebene sehr nahe bleiben müssen; wäre dies nicht der Fall, so würde man statt einer Reihe von Ringen eine Reihe von Schalen als Gleichgewichtsfigur finden. Leider werden damit die Rechnungen mühsam und verwickelt, so daß es sich empfiehlt, an dem vorigen Modelle festzuhalten; der Gang der Phänomene muß aber offenbar in beiden Fällen seine Hauptzüge beibehalten.

Wir nehmen also an, es seien N Teilchen mit der (negativen) Ladung q gegeben, und sie werden in eine positive Kugel, mit der Gesamtladung Nq, gebracht und zu Ringen angeordnet. Wir setzen weiter voraus, es habe jeder Ring die größte Zahl von Teilchen, welche mit der Stabilität des Gleichgewichts verträglich ist.

Man bezeichne durch $f(n)$ die Zahl der inneren Teilchen, welche einen Ring von n Teilchen zu einem stabilen machen; $f(n)$ wurde für einige Werte des n im vorigen Paragraphen berechnet, und ist dort durch ν' bezeichnet. Nehmen wir jetzt an, daß in unserem System der äußere Ring n_1 Teilchen enthält; dann wird selbstverständlich

$$N - n_1 = f(n_1). \tag{1}$$

Bezeichnet man noch mit n_2, n_3 ... usw. die Anzahl der Teilchen, welche im zweiten bzw. im dritten Ringe usw. enthalten sind, so bekommt man

$$\begin{cases} N - n_1 - n_2 = f(n_2), \\ N - n_1 - n_2 - n_3 = f(n_3), \\ N - n_1 - n_2 - n_3 - n_4 = f(n_4), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Gleichungen können wir nun durch ein graphisches Verfahren leicht auflösen. Wir zeichnen dazu die Kurve der Fig. 62, in welcher die n als Ordinaten, die $f(n)$ aber als Ab-

szissen eingetragen wurden; die $f(n)$ sind dabei aus der Tabelle des vorigen Paragraphen zu entnehmen.

Ist nun, wie gesagt, ein System von N Teilchen gegeben, so müssen wir auf der Abszissenachse die Strecke $OP = N$

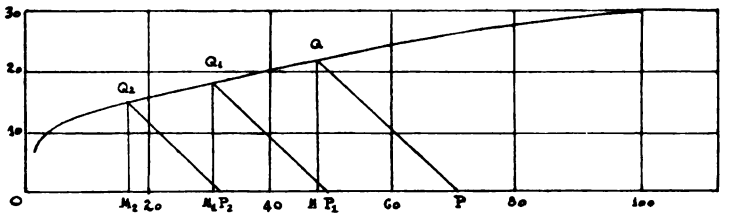


Fig. 62.

abtragen; danach eine Gerade PQ, welche mit der (positiven) Richtung von OP einen Winkel von 135° einschließt, ziehen und endlich von Q aus QM senkrecht zur $f(n)$-Achse fällen

Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} f(QM) &= OM, \\ &= OP - PM, \\ &= OP - QM, \end{aligned}$$

was mit Gleichung (1) genau übereinstimmt. QM stellt also die Zahl n_1 der Teilchen dar, welche in dem äußeren Ringe unseres Systems enthalten sind. Oder besser gesagt: es ist n_1 die größte ganze Zahl, die kleiner als QM ist.

Um n_2 zu finden, nehmen wir $OP_1 = N - n_1$ (wenn QM eine ganze Zahl ist, stimmt dabei P_1 mit M überein), und ziehen $P_1 Q_1$, PQ parallel; dann stellt offenbar der ganze Teil von $Q_1 M_1$ den gesuchten Wert von n_2 dar.

Auf ähnliche Weise sind übrigens n_3, n_4 usw. zu bestimmen. Folgende Tabellen wurden nach dem eben angegebenen Verfahren berechnet.

N	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
n_1	20	19	18	17	16	16	15	13	12	10	8	5
n_2	16	16	15	14	13	12	10	9	7	5	2	—
n_3	13	12	11	10	8	6	5	3	1	—	—	—
n_4	8	7	5	4	3	1	—	—	—	—	—	—
n_5	3	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—

N	59	60	61	62	63	64	65	66	67
n_1	20	20	20	20	20	20	20	20	20
n_2	16	16	16	17	17	17	17	17	17
n_3	13	13	13	13	13	13	14	14	15
n_4	8	8	9	9	10	10	10	10	10
n_5	2	3	3	3	3	4	4	5	5.

59 ist der kleinste und 67 der größte Wert von N, dem ein äußerer Ring von 20 Teilchen entspricht.

§ 4. Aus diesen Zahlen läßt sich nun eine sinnreiche Darstellung des periodischen Systems der Elemente ableiten.

Dazu nehmen wir an, es entspreche N dem Atomgewicht des betrachteten Systems.

Es ist vor allem zu bemerken, daß unsere Resultate die Möglichkeit geben, die verschiedenen Atome nach Familien zu ordnen, welchen ganz bestimmte physikalische und chemische Eigenschaften zukommen. Z. B. finden wir, daß dem Systeme von 60 Teilchen dieselben inneren Ringe, wie dem Systeme von 40 Teilchen entsprechen; es kommt dazu nur ein äußerer Ring von 20 Teilchen.

Höhere Glieder derselben Familie sind leicht zu finden.

In Figur 63, die dieselbe Kurve wie Fig. 62 enthält, ziehen

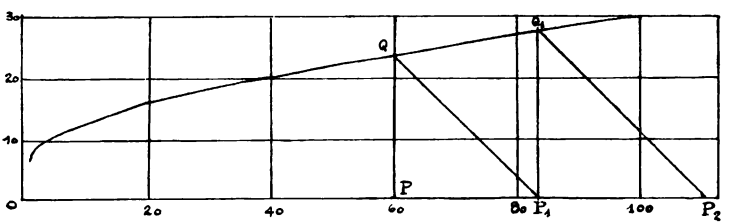


Fig. 63.

wir die Gerade QP_1, welche gegen OP um 135° geneigt ist; dann stellt offenbar OP_1 die Zahl N der Teilchen dar, die in einem System enthalten sind, dem als innere Ringe die Ringe des Systems von OP Teilchen zukommen. Dabei ist durch $P_1 Q_1$ die Zahl der Teilchen dargestellt, welche im äußeren Ringe enthalten sind.

§ 5. Die allmähliche Variation der Eigenschaften, die in einer horizontalen Reihe des periodischen Systems sich zeigt,

findet wieder im Thomsonschen Modell eine treffliche Darstellung.

Das System von 59 Teilchen ist das erste, welches einen äußeren Ring von 20 Teilchen enthält; es liegt daher, so zu sagen, auf der Grenze der Unstabilität. Bei Einwirkung von äußeren Kräften wird also das betrachtete System leicht ein Teilchen verlieren, und damit eine positive Ladung erhalten. Es stellt also anscheinend dieses System ein stark elektropositives Element dar.

Die Stabilität nimmt natürlich mit der Zahl der Teilchen fortwährend zu, so daß das System von 60 Teilchen schon einen niedrigeren elektropositiven Charakter, wie das von 59 Teilchen zeigen müßte.

Bei höheren Gliedern der Gruppe wird die Stabilität so groß, daß das Atom negative Teilchen sich aneignen kann, und damit eine negative Ladung erhält.

Ein plötzliches Wechseln der chemischen Eigenschaften muß aber eintreten, wenn wir zum System von 68 Teilchen gelangen. Denn dies System hat ein kaum stabiles Gleichgewicht; es wird sich daher als elektropositiv wie das Atom von 59 Teilchen zeigen.

Es ist aber zu bemerken, daß die Systeme von 59 bzw. von 68 Teilchen durchaus nicht geladen bleiben können; wenn ein Teilchen fortgegangen ist, erhalten sie ohne weiteres eine recht stabile Struktur, so daß die positive Ladung nicht mehr zunehmen wird. Es zieht sogar das System ein negatives Teilchen wieder an, wodurch die Teilchenzahl abermals den früheren Wert erhält.

Das Element, das in der Gruppe den ausgesprochensten positiven Charakter dauernd zeigen muß, ist also dasjenige, welches 60 Teilchen enthält. Dies kann aber offenbar nicht mehr als ein Teilchen verlieren; anders gesagt: es handelt sich um ein Element, dem nur eine Valenz zukommt.

Das System von 61 Teilchen wird dagegen, obwohl es keinen so stark ausgesprochenen elektropositiven Charakter wie das vorige haben wird, eine doppelt so große positive Ladung erhalten können; ihm kommen also zwei Valenzen zu.

Auf ähnliche Weise erkennen wir, daß das System von 62 Teilchen drei Valenzen hat. Es entsprechen übrigens den

Systemen von 64, 65, 66 und 67 Teilchen die Valenzen 3, 2, 1 und 0; hier ist aber der Charakter ein entschieden elektronegativer.

Die natürlichen Gruppen

He Li Be B C N O F Ne

Ne Na Mg Al Si P S Cl Arg

werden hiermit in wunderbarer Weise dargestellt.

Es können übrigens aus der Thomsonschen Theorie weitere Regelmäßigkeiten abgeleitet werden, auf die hier leider nicht eingegangen werden darf.

Zwanzigste Vorlesung.

Entwurf einer elektrostatischen Theorie der Spektralanalyse.

§ 1. Grundgedanken der Theorie. — § 2. Bild eines zweiatomigen Moleküls. — § 3—4. Doubletspektren. — § 5. Tripletspektren. — § 6. Schluß.

§ 1. In der vierzehnten Vorlesung haben wir eine elektromagnetische Theorie der Spektralanalyse entwickelt; dabei kam ein allgemeiner Satz zur Anwendung (der in der dreizehnten Vorlesung, § 1, bewiesen worden war), nach welchem ein zusammengesetztes Leitersystem ein Spektrum von so vielen Linien ausstrahlt, wie seine Bestandteile im ganzen auszusenden vermögen.

Einen ähnlich lautenden Satz kann man nun als Grundlage für die elektrostatische Spektraltheorie aufstellen, und wir brauchen dazu auch keine sehr ausgedehnten Rechnungen auszuführen.

Es genügt statt eines Systemes von komplizierten Leitern ein System von Teilchensystemen zu betrachten und dabei anzunehmen, daß die Kräfte, welche von Teilchen ausgeübt werden, die zu verschiedenen Partialsystemen gehören, gegenüber den inneren Kräften jedes Systems kaum merkbar sein müssen.

Setzt man in der Tat zwei komplizierte Leiter nebeneinander, so ruft die elektrodynamische Induktionswirkung in jeder Gleichung neue Glieder hervor, welche die Ableitungen zweiter Ordnung der Variabeln nach der Zeit enthalten;

lassen wir dagegen zwei Teilchensysteme aufeinander wirken, so bedingen die Coulombschen Kräfte die Entstehung neuer Glieder, welche ganz einfach nach den Koordinaten linear sind.

Es ist aber zu bedenken, wenn, wie bei optischen Fragen immer anzunehmen ist, die Variabeln mit e^{int} proportional sind, daß dann die Ableitungen zweiter Ordnung mit den Koordinaten wieder proportional werden.

Die elektromagnetische und die elektrostatische Theorie der Spektralanalyse müssen also zu ganz ähnlichen Resultaten führen.

Dies wollen wir jetzt durch die Betrachtung einiger Spezialfälle erläutern.

§ 2. Wir betrachten als erstes Beispiel ein Paar von Systemen, nach der Art desjenigen, welches in der XVI. Vorlesung (§ 5) berechnet wurde (Fig. 64).

Dabei setzen wir voraus, daß in jedem Systeme die positiven und negativen Ladungen untereinander gleich sind. Es

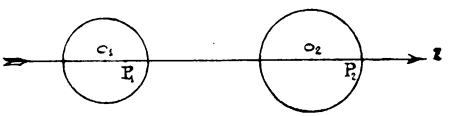


Fig. 64.

wird weiter, der Einfachheit halber, angenommen, daß die negativen Teilchen nur nach der Geraden $O_1 O_2$ Verschiebungen erfahren können; und z_1 bzw. z_2 für $O_1 P_2$ und $O_2 P_2$ geschrieben.

Es soll übrigens

$$O_1 O_2 = a$$

sein.

Dann nehmen die Lagrangeschen Gleichungen, wie leicht zu ersehen, folgende Form an

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 - \frac{q_1 q_2}{(a - z_1)^2} + \frac{q_1 q_2}{(a + z_2 - z_1)^2} + k_1^2 z_1 = 0, \\ m\ddot{z}_2 + \frac{q_1 q_2}{(a + z_2)^2} - \frac{q_1 q_2}{(a + z_2 - z_1)^2} + k_2^2 z_2 = 0, \end{cases}$$

und es wird der Reihe nach, durch selbstverständliche Umformungen

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 - \frac{q_1 q_2}{a^2 - 2a z_1} + \frac{q_1 q_2}{a^2 + 2a(z_2 - z_1)} + k_1^2 z_1 = 0, \\ m\ddot{z}_2 + \frac{q_1 q_2}{a^2 + 2a z_2} - \frac{q_1 q_2}{a^2 + 2a(z_2 - z_1)} + k_2^2 z_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 - \dfrac{q_1 q_2}{a^2\left(1 - \dfrac{2x_1}{a}\right)} + \dfrac{q_1 q_2}{a^2\left[1 + \dfrac{2(x_2 - x_1)}{a}\right]} + k_1^2 z_1 = 0, \\ m\ddot{z}_2 + \dfrac{q_1 q_2}{a^2\left(1 + \dfrac{2x_2}{a}\right)} - \dfrac{q_1 q_2}{a^2\left[1 + \dfrac{2(x_2 - x_1)}{a}\right]} + k_2^2 z_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 - \dfrac{q_1 q_2}{a^2}\left(1 + \dfrac{2x_1}{a}\right) + \dfrac{q_1 q_2}{a^2}\left[1 - \dfrac{2(x_2 - x_1)}{a}\right] + k_1^2 z_1 = 0, \\ m\ddot{z}_2 + \dfrac{q_1 q_2}{a^2}\left(1 - \dfrac{2x_2}{a}\right) - \dfrac{q_1 q_2}{a^2}\left[1 - \dfrac{2(x_2 - x_1)}{a}\right] + k_2^2 z_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 - \dfrac{2q_1 q_2}{a^3} z_2 + k_1^2 z_1 = 0, \\ m\ddot{z}_2 - \dfrac{2q_1 q_2}{a^3} z_1 + k_2^2 z_2 = 0, \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} (mD^2 + k_1^2) z_1 - \dfrac{2q_1 q_2}{a^3} z_2 = 0, \\ (mD^2 + k_2^2) z_2 - \dfrac{2q_1 q_2}{a^3} z_1 = 0. \end{cases}$$

Hieraus erhält man nun folgende Charakteristik

$$\begin{vmatrix} mD^2 + k_1^2 & -h \\ -h & mD^2 + k_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

wo der Kürze halber

$$\frac{2q_1 q_2}{a^3} = h$$

gesetzt wurde. Die Schwingungsperioden sind also nach den Formeln

$$T_1^*, T_2^* = 2\pi \sqrt{\frac{2m^2}{m(k_1^2 + k_2^2) \pm \sqrt{m^2(k_2^2 - k_1^2)^2 + 4m^2 h^2}}}$$

zu berechnen; oder nach leichten Umformungen

$$T_1^*, T_2^* = 2\pi \sqrt{\frac{2m^2}{m(k_1^2 + k_2^2) \pm m(k_2^2 - k_1^2)\left[1 + \dfrac{2h^2}{(k_2^2 - k_1^2)^2}\right]}},$$

und daher

$$T_1^* = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k_1}\left[1 + \frac{h^2}{2k_1^2(k_2^2 - k_1^2)}\right],$$

$$T_1^* = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k_2}\left[1 - \frac{h^2}{2k_2^2(k_2^2 - k_1^2)}\right].$$

Diese Ausdrücke sind jetzt mit denjenigen zu vergleichen, welche wir in der siebenten Vorlesung (§ 5) bzw. in der vier-

zehnten Vorlesung (§ 1) abgeleitet haben; hierdurch erhalten also die Versuche von Bunsen und Lockyer ein passendes elektrostatisches Bild (man vergleiche die I. Vorlesung, § 8).

§ 3. Setzt man in die Gleichungen (1)

$$k_1 = k_2 = k,$$

$$q_1 = q_2 = q,$$

betrachtet man also zwei gleiche Systeme, zu einem Atom verbunden, so wird

$$T^*, T^{**} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^2 \mp \frac{2q^2}{a^3}}},$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k}\left(1 \pm \frac{q^2}{k^2 a^3}\right),$$

$$= T\left(1 \pm \frac{q^2}{k^2 a^3}\right).$$

Durch die Koppelung löst sich also die einzige charakteristische Linie zu einem Doublet auf (man vergleiche hierüber VII. Vorl. § 6 und 16, XIV. Vorl. § 9).

§ 4. Die Einschränkung, welche im zweiten Paragraphen dieser Vorlesung den Verrückungen von P_1 und P_2 auferlegt wurde, können wir übrigens fallen lassen; damit werden aber die Rechnungen natürlich verwickelter.

Jetzt haben die Bewegungsgleichungen folgende Form:

$$\begin{cases}
m\ddot{x}_1 + \frac{q^2}{a^2 - 2ax_1}\frac{x_1}{a} + \frac{q^2}{a^2 + 2a(x_2 - x_1)}\frac{x_2 - x_1}{a} + k^2 x_1 = 0, \\
m\ddot{y}_1 + \frac{q^2}{a^2 - 2ax_1}\frac{y_1}{a} + \frac{q^2}{a^2 + 2a(x_2 - x_1)}\frac{y_2 - y_1}{a} + k^2 y_1 = 0, \\
m\ddot{z}_1 - \frac{q^2}{a^2 - 2ax_1} + \frac{q^2}{a^2 + 2a(x_2 - x_1)} + k^2 z_1 = 0, \\
m\ddot{x}_2 + \frac{q^2}{a^2 + 2ax_2}\frac{x_2}{a} - \frac{q^2}{a^2 + 2a(x_2 - x_1)}\frac{x_2 - x_1}{a} + k^2 x_2 = 0, \\
m\ddot{y}_2 + \frac{q^2}{a^2 + 2ax_2}\frac{y_2}{a} - \frac{q^2}{a^2 + 2a(x_2 - x_1)}\frac{y_2 - y_1}{a} + k^2 y_2 = 0, \\
m\ddot{z}_2 + \frac{q^2}{a^2 + 2ax_2} - \frac{q^2}{a^2 + 2a(x_2 - x_1)} + k^2 z_2 = 0,
\end{cases}$$

woraus sehr leicht

$$\left\{\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1 + \frac{q^2}{a^2}\frac{x_1}{a} + \frac{q^2}{a^2}\frac{x_2 - x_1}{a} + k^2 x_1 = 0,\\
&m\ddot{y}_1 + \frac{q^2}{a^2}\frac{y_1}{a} + \frac{q^2}{a^2}\frac{y_2 - y_1}{a} + k^2 y_1 = 0,\\
&m\ddot{z}_1 - \frac{q^2}{a^2}\left(1 + \frac{2x_1}{a}\right) + \frac{q^2}{a^2}\left[1 - 2\frac{(x_2 - x_1)}{a}\right] + k^2 z_1 = 0,\\
&m\ddot{x}_2 + \frac{q^2}{a^2}\frac{x_2}{a} - \frac{q^2}{a^2}\frac{x_2 - x_1}{a} + k^2 x_2 = 0,\\
&m\ddot{y}_2 + \frac{q^2}{a^2}\frac{y_2}{a} - \frac{q^2}{a^2}\frac{y_2 - y_1}{a} + k^2 y_2 = 0,\\
&m\ddot{z}_2 + \frac{q^2}{a^2}\left(1 - \frac{2x_2}{a}\right) - \frac{q^2}{a^2}\left[1 - 2\frac{(x_2 - x_1)}{a}\right] + k^2 z_2 = 0,
\end{aligned}\right.$$

und nachher

$$\left\{\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1 + \frac{q^2}{a^2}\frac{x_2}{a} + k^2 x_1 = 0,\\
&m\ddot{y}_1 + \frac{q^2}{a^2}\frac{y_2}{a} + k^2 y_1 = 0,\\
&m\ddot{z}_1 - 2\frac{q^2}{a^2}\frac{x_2}{a} + k^2 z_1 = 0,\\
&m\ddot{x}_2 + \frac{q^2}{a^2}\frac{x_1}{a} + k^2 x_2 = 0,\\
&m\ddot{y}_2 + \frac{q^2}{a^2}\frac{y_1}{a} + k^2 y_2 = 0,\\
&m\ddot{z}_2 - 2\frac{q^2}{a^2}\frac{x_1}{a} + k^2 z_2 = 0
\end{aligned}\right.$$

sich ableiten läßt.

Nach der allgemeinen Methode ist also die Charakteristik in die Form zu bringen

$$\begin{vmatrix}
mD^2+k^2 & \frac{q^2}{a^3} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{q^2}{a^3} & mD^2+k^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & mD^2+k^2 & \frac{q^2}{a^3} & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{q^2}{a^3} & mD^2+k^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & mD^2+k^2 & -\frac{2q^2}{a^3}\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2q^2}{a^3} & mD^2+k^2
\end{vmatrix} = 0,$$

oder, was dasselbe bedeutet

$$\left[(m D^2 + k^2)^2 - \left(\frac{q^2}{a^3}\right)^2\right]^2 \cdot \left[(m D^2 + k^2)^2 - \left(\frac{2 q^2}{a^3}\right)^2\right] = 0 .$$

Die Schwingungsperioden sind jetzt auf vier gewachsen, d. h.:

$$T^*, T^{**} = T\left(1 \pm \frac{q^2}{k^2 a^3}\right),$$

$$T^{***}, T^{****} = T\left(1 \pm \frac{q^2}{2 k^2 a^3}\right).$$

Eigentlich sind aber die Spektrallinien T^{***} und T^{****} doppelt zu rechnen. Anders gesagt, es gibt so viele Linien, als das System Freiheitsgrade besitzt. Dies ist der Satz, der die Grundlage der elektrostatischen Spektraltheorie bilden kann; wir sprechen ihn aus, indem wir sagen, daß der Grad der Charakteristik für ein System von Teilchensystemen gleich ist der Summe aus den Graden der charakteristischen Gleichungen, welche den Bestandteilen entsprechen (man vergleiche hierzu die XIII. Vorl. § 1).

§ 5. Werden zum Beispiel drei einfache Atome zu einem System zusammengestellt, so können wir auch ohne Rechnungen voraussehen, daß das Spektrum 9 Linien enthalten muß. Sind die Atome untereinander gleich, so löst sich jede Linie zu einem Triplet auf, werden die Freiheitsgrade vermindert, und, z. B. die Verschiebungen nur nach einer bestimmten Richtung

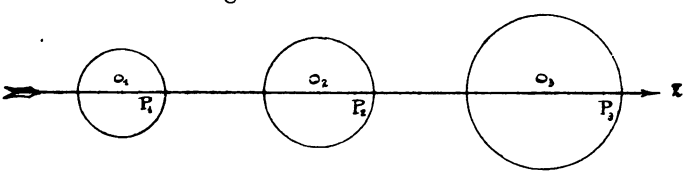


Fig. 65.

zugelassen, so reduziert sich das ganze Spektrum zu einem einzigen Triplet.

Für diesen einfachen Fall wollen wir auch die Rechnung ausführen.

Man setze (Fig. 65):

$$O_1 O_2 = a , \qquad O_2 O_3 = b$$

und nehme an, daß die Verschiebungen nur nach $O_1 O_3$ möglich sind. Dann wird

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 - \frac{q_1 q_2}{(a - z_1)^2} - \frac{q_1 q_3}{(a + b - z_1)^2} + \frac{q_1 q_2}{(a + z_2 - z_1)^2} + \frac{q_1 q_3}{(a + b + z_3 - z_1)^2} \\ \qquad + k_1^2 z_1 = 0, \\ m\ddot{z}_2 + \frac{q_1 q_2}{(a + z_2)^2} - \frac{q_2 q_3}{(b - z_2)^2} - \frac{q_1 q_2}{(a + z_2 - z_1)^2} + \frac{q_2 q_3}{(b + z_3 - z_2)^2} \\ \qquad + k_2^2 z_2 0, \\ m\ddot{z}_3 + \frac{q_1 q_3}{(a + b + z_3)^2} + \frac{q_2 q_3}{(b + z_3)^2} - \frac{q_1 q_3}{(a + b + z_3 - z_1)^2} - \frac{q_2 q_3}{(b + z_3 - z_2)^2} \\ \qquad + k_3^2 z_3 = 0, \end{cases}$$

also:

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 - \frac{2 q_1 q_2}{a^3} z_2 - \frac{2 q_1 q_3}{(a + b)^3} z_3 + k_1^2 z_1 = 0, \\ m\ddot{z}_2 - \frac{2 q_2 q_3}{b^3} z_3 - \frac{2 q_2 q_1}{a^3} z_1 + k_2^2 z_2 = 0, \\ m\ddot{z}_3 - \frac{2 q_3 q_1}{(a + b)^3} z_1 - \frac{2 q_3 q_2}{b^3} z_2 + k_3^2 z_3 = 0. \end{cases}$$

Wir setzen jetzt der Kürze halber

$$k_1 = k_2 = k_3 = k,$$
$$q_1 = q_2 = q_3 = q, \qquad 2\frac{q^2}{a^3} = h$$
$$a = b,$$

und erhalten

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 - h z_2 - \frac{1}{8} h z_3 + k^2 z_1 = 0, \\ m\ddot{z}_2 - h z_3 - h z_1 + k^2 z_2 = 0, \\ m\ddot{z}_3 - \frac{1}{8} h z_1 - h z_2 + k^2 z_3 = 0, \end{cases}$$

woraus die Charakteristik

$$\begin{vmatrix} mD^2 + k^2 & -h & -\frac{1}{8}h \\ -h & mD^2 + k^2 & -h \\ -\frac{1}{8}h & -h & mD^2 + k^2 \end{vmatrix} = 0$$

folgt. Beim Entwickeln dieser Gleichung wird aber

$$(mD^2 + k^2)\left[(mD^2 + k^2)^2 - \frac{129}{64} h^2\right] - \frac{1}{4} h^3 = 0,$$

und, wenn man h^3 als eine kleine Größe vernachlässigen will,

$$(mD^2 + k^2)\left[(mD^2 + k^2)^2 - \frac{129}{64} h^2\right] = 0,$$

also:

$$\begin{cases} m D^2 + k^2 = 0, \\ m D^2 + k^2 + \frac{\sqrt{129}}{8} h = 0, \\ m D^2 + k^2 - \frac{\sqrt{129}}{8} h = 0. \end{cases}$$

Die Eigenperioden, welche den Linien des Triplets entsprechen, sind also nach den Formeln

$$T^* = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k},$$

$$T^{**} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^2 + h\frac{\sqrt{129}}{8}}} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k}\left(1 - \frac{h}{k^2}\frac{\sqrt{129}}{16}\right),$$

$$T^{***} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^2 - h\frac{\sqrt{129}}{8}}} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k}\left(1 + \frac{h}{k^2}\frac{\sqrt{129}}{16}\right)$$

zu berechnen (man vergleiche hierüber die VII. Vorl. §§ 10—14 und die XIII. Vorl. § 8—9).

Auf Betrachtung komplizierter Fälle wollen wir verzichten; es ist bereits einleuchtend, daß das elektrostatische Modell der Spektralanalyse keine neuen Ergebnisse für den Lichtemissionsprozeß bieten kann.

§ 6. Fassen wir also alles zusammen, was wir bis jetzt gesehen, so dürfen wir schließen, daß sowohl die elektromagnetische als die elektrostatische Spektraltheorie, und sogar für besondere Fragen das mechanische Modell, gleiche Zulässigkeit besitzen; wohl kann das elektrostatische Bild als ein zweckmäßigeres erscheinen, die elektromagnetische Beschreibung behält aber, aus einem erkenntnistheoretischen Gesichtspunkte, ihre volle Gültigkeit bei und kann für Vorlesungszwecke gute Dienste leisten. Sie besitzt übrigens einen eigenartigen heuristischen Wert und bietet ja, für den Augenblick, die einzige Möglichkeit dar, den elektrischen Schwingungsprozeß künstlich nachzuahmen.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW

MAR 25 1915

JUN 5 1947

21Oct'61WC

IN STACKS

OCT 7 1961

REC'D LD

JAN 15 1962

9 Oct'63SB

REC'D LD

OCT 11'63-6 AM

NOV 14 1972

REC'D LD JAN 16 '74-5PM

30m-1,'15

YC 11141